Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. november 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. a) Legyen A tetszőleges 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy A mindig előállítható 6 darab 1 rangú mátrix összegeként.

b) Legyen B 5 rangú 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy B mindig előállítható 5 darab 1 rangú mátrix összegeként.

* * * * *

a) Legyenek C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 az A oszlopai és tegyük fel először, hogy egyik oszlop sem a nullvektor. (0 pont)

Legyen ekkor A_i az a 6×6-os mátrix, melynek i. oszlopa C_i, a többi oszlopa pedig $\underline{0}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$). (1 pont)

Ekkor $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ (1 pont)

és minden A_i rangja 1. (1 pont)

Ha a C_i-k között nullvektor is van, de nem mind nullvektor (mondjuk $C_1, \ldots, C_k = \underline{0}$, $k \le 5$), akkor $A_1, \ldots, A_k$ első oszlopa legyen C_6, a többi oszlopa $\underline{0}$, A_6 első oszlopa pedig legyen $-kC_6$, hatodik oszlopa C_6, a többi oszlopa $\underline{0}$. A többi A_i-t a korábbi módon definiáljuk. Nyilván ekkor is $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ és minden A_i rangja 1. (1 pont)

Végül, ha A minden oszlopa a nullvektor, azaz A nullmátrix, akkor legyen F tetszőleges 1 rangú mátrix, ekkor persze $-F$ is 1 rangú és $A = F + F + F + (-F) + (-F) + (-F)$. (1 pont)

b) B rangja 5, így B-nek létezik 5 független oszlopa (legyenek ezek — az általánosság korlátozása nélkül — az első öt oszlop: D_1, D_2, D_3, D_4, D_5), (1 pont)

a hatodik oszlop (legyen ez D_6) pedig előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként, (1 pont)

ellenkező esetben — az újonnan érkező vektor lemmája miatt — a hat oszlop független lenne, ami lehetetlen. (1 pont)

Legyen tehát $D_6 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 + \lambda_5 D_5$. Legyen most $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén B_i az a 6×6-os mátrix, melynek i. oszlopa D_i, hatodik oszlopa $\lambda_i D_i$, a többi oszlopa pedig $\underline{0}$. (1 pont)

Ekkor $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ és minden B_i rangja 1. (1 pont)

Ha valaki az a) feladatban nem foglalkozik azzal, hogy az oszlopok nullvektorok is lehetnek, akkor (ha egyébként jó a megoldása, vagyis tulajdonképpen azt látja be, hogy A előáll 6 legfeljebb 1 rangú mátrix összegeként) 3 pontot kapjon.

2. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,0)$ vektorhoz, az $(1,1)$ vektorhoz és az $(1,2)$ vektorhoz is az $(1,2)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

* * * * *

Ha alkalmas f lineáris transzformációt keresünk, akkor a lineáris leképezések tanult tulajdonságai miatt $f(0,1) = f((1,1)-(1,0)) = f(1,1) - f(1,0) = (0,0)$. (2 pont)
Így a tanultak szerint f mátrixa csak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ lehet (de ezen a ponton még nem tudjuk, hogy van-e ilyen f). (3 pont)
Könnyen ellenőrizhető, hogy $A \cdot (1,0)^T = (1,2)^T$, (1 pont)
$A \cdot (1,1)^T = (1,2)^T$ (1 pont)
és $A \cdot (1,2)^T = (1,2)^T$ is teljesül, (1 pont)
így az az f lineáris transzformáció, melynek mátrixa A, alkalmas lesz; és ezzel persze f mátrixát is megadtuk. (2 pont)

A jó mátrixot természetesen máshogy is meg lehet találni, akár még hasraütéses alapon is, de az első 5 pont akkor jár, ha valami kiderül arról, hogy miért épp ez a mátrix érdekes (pl. mert vele balról szorozva a megadott vektorokat épp a jó eredmények jönnek ki vagy mert felírtunk egy egyenletrendszert és annak lett ez a megoldása stb.) Ha valaki csak azt mutatja meg, hogy egy f lineáris transzformáció esetén az $f(1,0) = f(1,1) = (1,2)$ állításból következik $f(1,2) = (1,2)$, az 3 pontot kapjon. Akiben felmerül az igény arra, hogy ezen túlmenően ilyen lineáris transzformáció létezését valahogy megmutassa, az további 1 pontot kaphat.

3. Legyen $\underline{b}_1 = (2,1)$, $\underline{b}_2 = (3,1)$, $\underline{c}_1 = (1,1)$, $\underline{c}_2 = (1,0)$ és legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynek a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerinti mátrixa $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg f-nek a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis szerinti mátrixát.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázist B-vel, a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázist C-vel. $[f]_C$ első oszlopa a tanultak szerint $[f(\underline{c}_1)]_C$, második oszlopa $[f(\underline{c}_2)]_C$. (1 pont)
A lineáris leképezések ismert tulajdonsága szerint $f(\underline{c}_2) = f(1,0) = f((3,1)-(2,1)) = f(3,1) - f(2,1)$. (1 pont)
$f(3,1) = f(\underline{b}_2)$-t és $f(2,1) = f(\underline{b}_1)$-et az $[f]_B$ mátrixból határozhatjuk meg: annak első oszlopa ugyanis $[f(\underline{b}_1)]_B$, második oszlopa $[f(\underline{b}_2)]_B$. (1 pont)
Ezek alapján $f(\underline{b}_1) = 5\underline{b}_1 + 7\underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = 6\underline{b}_1 + 8\underline{b}_2$, (2 pont)
tehát $f(\underline{c}_2) = f(\underline{b}_2) - f(\underline{b}_1) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 = (5,2)$. (1 pont)
Hasonlóan számíthatjuk ki $f(\underline{c}_1)$-et: $f(\underline{c}_1) = f(1,1) = f((2,1)-(1,0)) = f(2,1) - f(1,0) = (5\underline{b}_1 + 7\underline{b}_2) - (\underline{b}_1 + \underline{b}_2) = 4\underline{b}_1 + 6\underline{b}_2 = (26,10)$. (2 pont)
A $(26,10)$ vektor C szerinti koordinátavektora $(10,16)$, az $(5,2)$ vektor C szerinti koordinátavektora $(2,3)$ (mivel $\underline{c}_2$ második koordinátája 0, a koordinátavektorok számítása nem okoz problémát), (1 pont)
a keresett mátrix így $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Második megoldás. B-vel (illetve C-vel) jelölve a B (illetve C) bázisok (oszlop)vektorainak egyesítésével keletkező mátrixot, a következő összefüggéseket írhatjuk fel a bázistranszformációról tanultak alapján: $[f]_C = C^{-1}[f]C$ és $[f]_B = B^{-1}[f]B$. (2 pont)
A második egyenlőségből könnyen meghatározhatjuk $[f]$-et: $[f] = B[f]_B B^{-1}$ (ahol $[f]_B$-t és B-t ismerjük, B^{-1}-et pedig B-ből Gauss-elimináció segítségével ki tudjuk számítani). (2 pont)
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, (2 pont)
ahonnan $[f] = \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Most már nem nehéz $[f]_C$-t sem meghatározni, ehhez még a C^{-1} mátrixra lesz szükség, amit B^{-1}-hez hasonlóan Gauss-eliminációval számíthatunk ki: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

$[f]_C = C^{-1}[f]C = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

4. Legyen A a jobbra látható mátrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Döntsük el, hogy A-nak sajátértéke-e a 2.

b) Döntsük el, hogy A-nak sajátvektora-e a $(2, 1, -1)$ vektor.

c) Adjuk meg A-nak egy olyan sajátvektorát, melynek első koordinátája 1 és adjuk meg a hozzá tartozó sajátértéket is.

* * * * *

a) Azt kell eldöntenünk, hogy létezik-e olyan $\underline{v} = (x, y, z)^T \neq (0, 0, 0)^T$ vektor, melyre $A\underline{v} = 2\underline{v}$. (A továbbiakban a transzponált jelölését mellőzzük.) (1 pont)

Ilyen vektor pontosan akkor létezik, ha a $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszernek van a csupa 0-tól különböző megoldása. (2 pont)

A Gauss-elimináció során 3 vezéregyest kapunk, így csak egy megoldás lesz ($x = y = z = 0$), a 2 tehát nem sajátérték. (2 pont)

b) Azt kell eldöntenünk, hogy $A \cdot (2, 1, -1)$ a $(2, 1, -1)$ vektornak számszorosa-e. (1 pont)
$A \cdot (2, 1, -1) = (-6, -3, 3)$, így a $(2, 1, -1)$ vektor sajátvektor. (1 pont)

c) Mivel $A \cdot (2, 1, -1) = (-6, -3, 3)$, a mátrixszorzásról tanultak szerint $A \cdot (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = A \cdot (\frac{1}{2}(2, 1, -1)) = \frac{1}{2}A \cdot (2, 1, -1) = \frac{1}{2}(-6, -3, 3) = (-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, (2 pont)
az $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ vektor olyan sajátvektor lesz, melynek első koordinátája 1, a hozzá tartozó sajátérték -3. (1 pont)

5. Határozzuk meg a $17x + 23y = 601$ egyenlet összes olyan megoldását, melyre x és y is pozitív egész.

* * * * *

A feladat szövege szerint az x egészre teljesül, hogy $17x \equiv 601 \pmod{23}$. (1 pont)
A bal oldalon $23x$-et, a jobb oldalon $23 \cdot 26$-ot kivonva a $-6x \equiv 3 \pmod{23}$ kongruenciát kapjuk. (2 pont)
-3-mal osztva $2x \equiv -1 \pmod{23}$ adódik (mivel -3 és 23 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (1 pont)
A jobb oldalhoz 23-at adva $2x \equiv 22 \pmod{23}$, ahonnan 2-vel osztva $x \equiv 11 \pmod{23}$ (mivel 2 és 23 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (1 pont)
Az x szám tehát $23k + 11$ alakba írható (ahol k egész). (1 pont)
Innen $y = \frac{601-17(23k+11)}{23}$, (1 pont)
vagyis $y = 18 - 17k$. (1 pont)
Az x, y megoldáspárok közül azokat kell megadnunk, melyekre x és y is pozitív. x pozitivitása azzal ekvivalens, hogy $k \geq 0$, míg y pozitivitása azzal, hogy $k \leq 1$. (1 pont)
Az alkalmas párokat tehát a $k = 0$ és a $k = 1$ esetben kapjuk: $x = 11, y = 18$, illetve $x = 34, y = 1$. (1 pont)

Ha valaki a kongruenciát nem tudja megoldani, de megállapítja, hogy annak van megoldása, az ezért kaphat 1 pontot. Aki nem részletezi, hogy az osztások során nem változik a modulus, attól nem kell pontot levonni (mivel ez többé-kevésbé magától értetődő), ha azonban valaki más módon oldja meg a kongruenciát és ennek során nem ennyire egyértelmű szituációkban mulasztja el a modulus vizsgálatát, attól minden ilyen hiányosságért vonjunk le 1 pontot. Ha valaki esetleg szorozza a kongruenciát és nem foglalkozik az esetleges hamis gyökökkel, attól ilyen hiányosságokért 2 pontot vonjunk le. Aki a kongruencia megoldása érdekében céltalan, nem előremutató lépéseket végez (és a megoldást persze nem kapja meg), az erre a részre ne kapjon pontot.

6*. Legyen A olyan négyzetes mátrix, melyre kizárólag $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül, hogy $A^2\underline{x} = \underline{x}$. Igaz-e, hogy ekkor az $A + E$ mátrixnak biztosan létezik inverze? (E az A-val azonos méretű egységmátrixot jelöli.)

* * * * *

A feladatbeli feltétel ekvivalens azzal, hogy $A^2\underline{x} - E\underline{x} = \underline{0}$ csak $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül, (1 pont)
ez pedig azzal, hogy $(A^2 - E)\underline{x} = \underline{0}$ csak $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy az $(A^2 - E|\underline{0})$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, (2 pont)
vagyis a tanultak szerint (mivel $A^2 - E$ négyzetes mátrix) $\det(A^2 - E) \neq 0$. (1 pont)
$(A + E)(A - E) = A^2 + EA - AE - E^2 = A^2 - E^2 = A^2 - E$ miatt, (3 pont)
a determinánsok szorzástételét használva $\det(A^2 - E) = \det(A + E) \cdot \det(A - E)$, (1 pont)
vagyis $\det(A + E)$ sem 0, ahonnan $A + E$ invertálhatósága azonnal következik. (1 pont)