Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen döfi az $x+2y+3z=6$ egyenletű síkot az $(1,1,1)$ pontban, az f egyenesről pedig hogy átmegy az $(5,2,-1)$ ponton és a $(13,4,-5)$ ponton. Döntsük el, hogy e-nek és f-nek van-e közös pontja.

* * * * *

Első megoldás. Az e egyenes merőleges a megadott síkra, a sík normálvektora tehát az egyenes irányvektora lesz. (1 pont)
A sík egyenlete alapján a kérdéses irányvektor $\underline{i_1}=(1,2,3)$. (1 pont)
Ismerjük e egy pontját is: (1,1,1), így a paraméteres egyenletrendszerét könnyű felírni: $x=t+1$, $y=2t+1, z=3t+1$. (1 pont)
Az f egyenes egy irányvektorát megkapjuk a két megadott pont (mint helyvektor) különbségeként: $\underline{i_2}=(8,2,-4)$. (1 pont)
Innen f paraméteres egyenletrendszere: $x=8t'+5, y=2t'+2, z=-4t'-1$. (1 pont)
A két paraméteres egyenletrendszerben szereplő t, illetve t' paraméterek nem feltétlenül egyenlők, így érdemes már itt különbözőképp jelölni őket. Ha valaki ezt elmulasztja és a későbbiekben is azonosnak feltételezi t-t és t'-t, az eddigi pontokat (ha egyébként mindent helyesen csinált) persze kapja meg.
A két egyenes esetleges közös pontjának meghatározásához meg kell oldanunk a két paraméteres egyenletrendszer egyesítéseként kapott egyenletrendszert. (1 pont)
$x=t+1=8t'+5$, innen $t=8t'+4$. Ezt az $y=2t+1=2t'+2$ egyenletbe helyettesítve $t'=-\frac{1}{2}$ és így $t=0$ adódik, mely értékekre teljesül a $3t+1=-4t'-1$ egyenlőség is. (3 pont)
Az egyenletrendszernek tehát $t'=-\frac{1}{2}, t=0, x=1, y=1, z=1$ a megoldása, a két egyenesnek így van közös pontja (éspedig az $(1,1,1)$). (1 pont)

A két paraméteres egyenletrendszer helyett dolgozhatunk a belőlük kapott „sima” egyenletrendszerekkel is, ez esetben egy négy egyenletből álló három ismeretlenes rendszert kell megoldanunk. A két „sima” egyenletrendszer felírásáért összesen 1 pontot, a közös megoldásukért 3 pontot, a végkövetkeztetésért 1 pontot adjunk.

Második megoldás. Az f egyenes két megadott pontja rajta van a megadott síkon, (1 pont)
ezért f teljes egészében a síkban fekszik. (2 pont)
Mivel e-nek egyetlen közös pontja van a síkkal (az $(1,1,1)$ pont), (1 pont)

elég azt ellenőrizni, hogy f átmegy-e az $(1,1,1)$ ponton. (2 pont)
Ehhez még f egyenletrendszerét sem kell felírni, elég megnézni, hogy a $(13,4,-5)-(5,2,-1)$ és a $(13,4,-5)-(1,1,1)$ vektorok párhuzamosak-e. (3 pont)
Mivel a kérdéses vektorok $((8,2,-4)$ és $(12,3,-6))$ párhuzamosak, az $(1,1,1)$ pont rajta van f-en, így közös pontja e-nek és f-nek. (1 pont)

Természetesen ha valaki megmutatja, hogy az $(1,1,1)$ pont rajta van e-n és f-en is, az 10 pontot kapjon, akkor is, ha nem vizsgálja f és a sík viszonyát, a fenti pontok elsősorban akkor alkalmazandók, ha valaki elindul ebbe az irányba, de nem fejezi be a megoldását.

2. Álljon az $\mathbb{R}^4$ V altere azon $\underline{x}$ vektorokból, melyekre $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$ teljesül (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i. koordinátáját jelöli). Adjunk meg egy bázist V-ben és mutassuk is meg róla, hogy bázis. (Azt, hogy V altér, nem kell igazolnunk.)

* * * * *

Az előadáson tanult módszerrel, egyenként választjuk ki a bázis elemeit V elemei közül. Az első vektor legyen például $(0,0,3,1)$. (2 pont)
A második vektort úgy kell választanunk, hogy ne legyen az elsőnek számszorosa, ekkor a két vektor független lesz (hiszen az első vektor nem a nullvektor volt). (1 pont)
E célra nyilván megfelel például az $(1,1,0,0)$ vektor. (1 pont)
Most belátjuk, hogy az $(1,1,0,0),(0,0,3,1)$ rendszer bázisa V-nek. Ehhez azt kell megmutatni, hogy generátorrendszere V-nek, hiszen a függetlenségéről már meggyőződtünk. (2 pont)
Legyen $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ a V tetszőleges eleme, azt kell igazolnunk, hogy ez előáll az $(1,1,0,0)$ és $(0,0,3,1)$ vektorok lineáris kombinációjaként. (1 pont)
$\underline{x} = x_1(1,1,0,0) + x_4(0,0,3,1)$, (2 pont)
hiszen $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$. (1 pont)

3. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

* * * * *

Írjuk fel az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) + \beta(\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}) + \gamma(3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) = \underline{0}$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\underline{a} + (\alpha+\beta+\gamma)\underline{b} + (\alpha+3\beta+\gamma)\underline{c} = \underline{0}$$

adódik. (3 pont)
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\beta+3\gamma = 0$, $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\alpha+3\beta+\gamma = 0$. (3 pont)
Ebből minimális számolással $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ adódik. (1 pont)
Az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációja tehát csak lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\
-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 3 \\
3x_1 + 6x_2 + p \cdot x_3 + 9x_4 &= p
\end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & 0 & p-6 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)

Ha $p \neq 3$, akkor a harmadik és a negyedik sort kicserélve, majd az új harmadik sort $(p-3)$-mal osztva folytatjuk az eliminációt, (2 pont)

melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5\frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+2\frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)

Innen a megoldás $x_1 = -5\frac{p-6}{p-3}$, $x_2 = 1 + 2\frac{p-6}{p-3}$, $x_3 = \frac{p-6}{p-3}$, $x_4 = 0$. (1 pont)

Ha ezzel szemben $p = 3$, akkor a negyedik sor tilos sor, hiszen a bal oldalon csak 0-k szerepelnek, a jobb oldalon viszont 3, (2 pont)

így ekkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (1 pont)

Akik a Gauss-eliminációt követik, azoknak a nyilvánvaló (itt nem részletezett) lépésekhez nem muszáj magyarázatot fűzniük, a Gauss-eliminációtól eltérő megoldásokban azonban minden esetben indokolni kell, hogy a megoldáshalmaz miért nem változik, ennek hiányáért lépésenként legalább 1 pont levonása indokolt. Kivétel ez alól az, ha valaki a lépcsős alak eléréséhez a harmadik és a negyedik sort úgy cseréli ki, hogy nem ellenőrzi, hogy $p - 3 \neq 0$ teljesül-e, hanem ezt csak a csere után vizsgálja.

5. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

* * * * *

Léteznek ilyen mátrixok, jó például az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ választás, de az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ választás is (meg még sok másik). Jó példa indoklással 10 pont, hiányos indoklás esetén adhatunk részpontszámot. Aki viszont csak két mátrixot ad meg mindennemű bizonyítás nélkül, az akkor is 0 pontot kapjon, ha egyébként a példa jó.

6. Létezik-e olyan n egész szám, melyre az alábbi determináns értéke 0?

$$\begin{vmatrix} 1241 & 1526 & 1566 & n \\ 1914 & 1711 & 896 & 1944 \\ 1552 & 1848 & 1867 & 2004 \\ n+955 & 1896 & 1990 & 1849 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy semmilyen egész n-re sem lesz a determináns 0, mégpedig úgy, hogy belátjuk, hogy a determináns páratlan egész szám. (1 pont)

A bizonyítást a definíciót használva végezzük. Ahhoz, hogy egy, a definícióban szereplő szorzat páratlan legyen, szükséges hogy a második sorból a második, a harmadik sorból a harmadik elemet válasszuk ki, hiszen minden más esetben lenne páros szám a szorzatban, így az maga is páros lenne. (2 pont)

Ha n páros, akkor ugyanilyen okból az első sorból az első elemet kell választanunk, (2 pont)

ahonnan már adódik, hogy a negyedik sorból a negyedik elemet választjuk. Ez a szorzat valóban páratlan lesz és ebben az esetben az egyetlen páratlan a definícióban szereplő szorzatok közül, így ekkor a determináns csakugyan páratlan. (2 pont)

Ha n páratlan, akkor a második és a harmadik sor vizsgálata után a negyediket érdemes megnézni, ebben ugyanis az első elem páros lesz, így innen a negyediket kell választanunk páratlan szorzathoz, (2 pont)

ahonnan adódik, hogy az első sorból ismét az első elemet kell választanunk. Ugyanúgy mint az előző esetben, a determináns most is páratlan. (1 pont)

Azok a hallgatók, akik a paritást nem vizsgálva csak a determináns tulajdonságait vagy a kifejtési tételt próbálják használni (kevés sikerrel) 0-1 pontot kapjanak.