Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2023. november 3.

1. Adjuk meg az összes olyan n egész számot 1 és 2023 között, amire az $\dfrac{n-2}{21}$ tört és az $\dfrac{n-5}{166}$ tört értéke is egész szám.

2. Mennyi maradékot ad $6 \cdot 10^{23}$ 9998-cal osztva?

3. Egy szabályos téglatest alakú láda sík felületű, lejtős talajon áll. A láda $A(1;4;2)$ csúcsa a talajon van, az ezzel szomszédos $B(4;2;1)$ csúcsa viszont nincs a talajon. Metszi-e a talaj síkja a z-tengelyt? Ha igen, hol?

4. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 19 \\ 29 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}.$$

5. A $V \leq \mathbb{R}^5$ altér azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból áll, amiknek az első három koordinátája (fölülről lefelé) számtani sorozatot alkot, az utolsó három koordinátája pedig (szintén fölülről lefelé) 2 kvóciensű mértani sorozatot alkot. (Így például a jobbra látható vektor V-beli.) Határozzuk meg $\dim V$-t, a V altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy V valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \\ 22 \\ 44 \end{pmatrix}$$

6*. Adjuk meg 1024 összes cinkosát (vagyis az összes olyan 1024-nél kisebb, pozitív egészt, amik a Fermat-teszt végrehajtásakor nem tanúsítják 1024 összetett voltát).

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2023. december 1.

1. A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 24x_3 + (3p-1)\cdot x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 17x_2 + 22x_3 + (q-5p)\cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2. Legyen $\pi = (5,2,6,1,4,3)$ (vagyis π az $1,2,\dots,6$ számoknak az a permutációja, amire $\pi_1 = 5$, $\pi_2 = 2$, $\dots$, $\pi_6 = 3$). A 6×6-os A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \geq \pi_i, \\ 0, & \text{ha } j < \pi_i \end{cases}$$

minden $1 \leq i,j \leq 6$ esetén (vagyis minden i-re az i-edik sorban a π_i-edik helyen és attól jobbra mindenhol 1-es áll, a π_i-edik helytől balra pedig 0). Számítsuk ki $\det A$ értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg $\det A$ értékét.)

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 6 & 17 & 19 & 23 \\ 12 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. a) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak, és p-nek azokra az értékeire, amikre A^{-1} létezik, adjuk is meg azt.

b) Azokra a p-kre, amikre A^{-1} létezik, határozzuk meg az $(A^{-1}-E)\cdot(A^2-A)+(A-E)^2$ mátrixot.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2p & p+1 \end{pmatrix}$$

5. Legföljebb hányat lehet kiválasztani az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok közül úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix},\ \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix},\ \underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix},\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

6*. Az $n\times n$-es A mátrixra $A + A^2 + A^3 = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$ vagy $\det A = 1$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Első pótzh

2023. november 17.

1. A Nagy Piréz Rendszer harmadik bolygóján ősidők óta minden hónap 29 napos, az év végén visszamaradó 22 napot pedig a messzeföldön híres piréz kumisz mértéktelen fogyasztásával töltik a lakosok. A Piréz Nemzeti Bank mélyreható elemzése azonban nemrég kimutatta, hogy a gazdaság teljesítményére az év végi 22 napos szünet kedvezőtlen hatással van, ezért bevezetik a 32 napos hónapot, így a hónapokból kimaradó napok száma 5-re csökken. Hány napból áll az év a harmadik bolygón, ha tudjuk, hogy a negyedik bolygó éve (ami persze hosszabb a harmadikénál) 1000 napos?

2. Mennyi maradékot ad 499^{4201} 539-cel osztva?

3. Legyen $\underline{i} = (3; 0; -1)$ irányvektora az e és az f egyenesnek is. Az e egyenes tartalmazza a $(3; 1; 2)$ pontot, f pedig az $(5; -1; 1)$ pontot. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, mely e-t és f-et is tartalmazza.

4. A $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azon vektorokból áll, melyeknek az első 4 koordinátája számtani sorozatot alkot, az utolsó koordináta pedig az első 4 koordináta összege. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V-beli. Altér-e V $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5. Mely p valós számok esetén teljesül, hogy a jobbra látható vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ bázisává lehet kiegészíteni?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ p \end{pmatrix}$$

6*. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan x egész szám, melyre $x^6 \equiv 2 \pmod{201}$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
második pótzárthelyi
2023. december 11.

1. Létezik-e az alábbi egyenletrendszernek olyan megoldása, melyre $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix determinánsát a p valós paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Legyenek A és B 2×2-es mátrixok. C legyen az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső és jobb felső 2×2-es részmátrixa A, bal alsó és jobb alsó 2×2-es részmátrixa B. Legyen továbbá D az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső 2×2-es részmátrixa A, jobb alsó 2×2-es részmátrixa B, a többi 8 eleme pedig 0.

a) Igaz-e, hogy ekkor $\det C = \det A \det B$ mindig teljesül?

b) Igaz-e, hogy ekkor $\det D = \det A \det B$ mindig teljesül?

4. Létezik-e olyan mátrix, melynek a jobbra látható mátrix az inverze? Ha igen, adjuk is meg.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Egy 5×5-ös A mátrix első négy sora lineárisan független, az első négy oszlopa pedig lineárisan összefüggő. Határozzuk meg A rangjának összes lehetséges értékét.

6*. Az 5×5-ös A mátrixról annyit tudunk, hogy a rangja 3.

a) Mutassuk meg, hogy A-nak bármely elemét bárhogy megváltoztatva a kapott mátrix rangja legfeljebb 4 lesz.

b) Mutassuk meg, hogy A-nak létezik olyan eleme, melyet alkalmasan megváltoztatva a kapott mátrix rangja 4 lesz.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótpótzárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2023. december 18.

1. Az n pozitív egész 84-szeresének az utolsó három számjegye által alkotott szám 1-gyel nagyobb, mint az n utolsó három számjegye által alkotott szám. Mi n utolsó három számjegye?

2. Egy számtani sorozat első tagja 600, differenciája 77. (A sorozat tagjai tehát: $600, 677, 754, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 601 tagjának szorzata 77-tel osztva?

3. A $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azokból az $\mathbb{R}^5$-beli $\underline{v}$ vektorokból áll, amik az alábbi két feltétel közül legalább az egyiket teljesítik:

- $\underline{v}$ első három koordinátája (fölülről lefelé) számtani sorozatot alkot;
- $\underline{v}$ utolsó három koordinátája (fölülről lefelé) számtani sorozatot alkot.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Így például a jobbra látható két vektor V-beli.) Alteret alkot-e V $\mathbb{R}^5$-ben?

4. Milyen geometriai alakzatot alkot az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok generált altere? Írjuk fel a szóban forgó alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. A $W \leq \mathbb{R}^5$ altér azon vektorokból áll, melyeknek az első négy koordinátája (fölülről lefelé) számtani sorozatot alkot, az utolsó koordináta pedig az első négy koordináta összege. Így például a jobbra látható $\underline{w}$ vektor W-beli. Adjunk meg W-ben egy olyan bázist, ami tartalmazza a jobbra látható $\underline{w}$ vektort. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.)

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

6*. Határozzuk meg az $A(79; 2; 37)$, $B(-19; 72; 23)$ és $C(59; 42; 47)$ pontok által meghatározott háromszög körülírt körének a középpontját.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótpótzárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2023. december 18.

1. Az alábbi egyenletrendszernek megoldása $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, nincs viszont olyan megoldása, melyben valamelyik változó értéke 2 lenne. Adjuk meg az egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

2. Legyen A a jobbra látható mátrix. Létezik-e olyan p valós szám, melyre q értékétől függetlenül $\det A = 0$?

$$A = \begin{pmatrix} q & 2 & 1 & 1 \\ 2 & p & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Az A 5×5-ös mátrixról és a $\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^5$ vektorokról annyit tudunk, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ és $A\underline{x} = \underline{c}$ mátrixegyenleteknek nem ugyanannyi megoldása van. Hány megoldása van az $A\underline{x} = \underline{0}$ mátrixegyenletnek?

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Létezik-e olyan B mátrix, melyre $AB = E$ teljesül, ahol E a 2×2-es egységmátrix? Ha igen, adjunk is meg egy ilyet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját a p valós paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & p & p & 2 \\ 2 & 1 & 3 & p & 3 \\ 1 & 4 & 1 & p & 5 \end{pmatrix}$$

6*. Legyen A n rangú $n \times n$-es mátrix, k és m pedig olyan természetes számok, melyekre $k+m \geq n$, $k \leq n$ és $m \leq n$ teljesülnek. Mutassuk meg, hogy A előállítható egy k és egy m rangú mátrix összegeként (vagyis létezik olyan k rangú K és m rangú M mátrix, melyekre $K + M = A$).

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el. Az aláírás megszerzéséhez mindkét zárthelyin legalább 24 pontot kell elérni.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. november 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Adjuk meg az összes olyan n egész számot 1 és 2023 között, amire az $\dfrac{n-2}{21}$ tört és az $\dfrac{n-5}{166}$ tört értéke is egész szám.

* * * * *

A két tört értéke azokra az n-ekre ad egész számot, amikre $n \equiv 2 \pmod{21}$ és $n \equiv 5 \pmod{166}$. (1 pont)
A kapott kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg. Az első kongruenciából $n = 21k + 2$ valamilyen k egészre. Ezt a másodikba helyettesítve: $21k + 2 \equiv 5 \pmod{166}$. Mindkét oldalból 2-t levonva a $21k \equiv 3 \pmod{166}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mivel $(21, 166) = 1$ (mert nincs közös prímosztójuk) és $1 \mid 3$, ezért a tanult tételt szerint a lineáris kongruencia megoldható és egyetlen megoldása van modulo 166. (1 pont)
A kongruencia mindkét oldalát 8-cal szorozva $168k \equiv 24 \pmod{166}$, vagyis $2k \equiv 24 \pmod{166}$ következik. (1 pont)
(Ez az átalakítás nem volt ekvivalens lépés, mert $(166, 2) = 2$ és így a $168k \equiv 24 \pmod{166}$ kongruenciát 8-cal osztva nem az eredeti alakot kapnánk vissza.) (0 pont)
Mindkét oldalt 2-vel osztva: $k \equiv 12 \pmod{83}$, ahol a modulust $(2, 166) = 2$ miatt osztottuk 2-vel. (1 pont)
Ebből tehát $k \equiv 12 \pmod{166}$ vagy $k \equiv 95 \pmod{166}$. (1 pont)
Ezek közül $k \equiv 12 \pmod{83}$ nem megoldása a lineáris kongruenciának, mert $21 \cdot 12 = 252 \not\equiv 3 \pmod{166}$. (Ez a hamis gyök a nem ekvivalens lépés miatt keletkezett.) Mivel a fentiek szerint a lineáris kongruenciának egyetlen megoldása van modulo 166, ezért ez a $k \equiv 95 \pmod{166}$. (1 pont)
Ebből tehát $k = 166\ell + 95$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $n = 21k + 2 = 21(166\ell + 95) + 2 = 3486\ell + 1997$. (2 pont)
Mivel ez csak az $\ell = 0$ értékre esik 1 és 2023 közé, ezért $n = 1997$ az egyetlen, a feladat feltételeinek megfelelő egész szám. (1 pont)

A megoldhatóságra és a megoldások számára vonatkozó tétel alkalmazása kiváltható a $k \equiv 95 \pmod{166}$ megoldás ellenőrzésével is. A megoldás közben előállt lineáris kongruencia természetesen más tanult módszerekkel, így akár az Euklideszi algoritmussal is megoldható; ezzel dolgozva sorra a $166k \equiv 0 \pmod{166}$, $21k \equiv 3 \pmod{166}$, $19k \equiv -21 \pmod{166}$, $2k \equiv 24 \pmod{166}$, végül a $k \equiv -237 \equiv 95 \pmod{166}$ kongruenciák keletkeznek. Ekkor a lineáris kongruencia megoldásáért járó 5 pontból 1 pontot ér az a tény, hogy a megoldó az algoritmust alkalmazza (amit nem kell feltétlen megneveznie, elég, ha az alkalmazása révén ezt egyértelműen demonstrálja); további 1 pontot ér annak az ellenőrzése, hogy az eljárás a tanultak szerint leosztás nélkül (vagyis az első fázis kihagyásával) alkalmazható, mert $(21, 166) = 1$; végül 3 pontot ér maga a számolás.

2. Mennyi maradékot ad $6 \cdot 10^{23}$ 9998-cal osztva?

* * * * *

Első megoldás. A ismételt négyzetre emelések módszerével kiszámítjuk 10^{23} 9998-as maradékát.(1 pont)
Ehhez meghatározzuk a $10^1, 10^2, 10^4, 10^8, 10^{16}$ hatványok 9998-as maradékát (mindig az előző négyzetre emelésével és a kapott eredmény 9998-as maradékát véve). Ezek sorra: 10, 100, 2, 4, 16. (3 pont)
Mivel $23 = 1 + 2 + 4 + 16$, (1 pont)
ezért kiszámítjuk először a $10^3 = 10^1 \cdot 10^2$, majd a $10^7 = 10^3 \cdot 10^4$, végül a $10^{23} = 10^7 \cdot 10^{16}$ hatványok 9998-as maradékait (a korábban kiszámolt megfelelő maradékokkal való szorzással és a kapott eredmények 9998-as maradékát véve). Ezek sorra: 1000, 2000 és 2006. (3 pont)
A $10^{23} \equiv 2006 \pmod{9998}$ kongruenciát 6-tal szorozva: $6 \cdot 10^{23} \equiv 6 \cdot 2006 = 12036 \equiv 2038 \pmod{9998}$.
Így a keresett maradék a 2038. (2 pont)
A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges a fenti részletességgel leírni az elvégzett műveletek mögötti szándékot, elegendő a helyes számítások közlése. A fenti pontozás szerinti első 1 pont annak jár, aki felismeri, hogy a feladat az ismételt négyzetre emelések módszerével megoldható (és ezt legalább azzal jelzi, hogy az algoritmus alkalmazását megkezdi). Mivel azonban a feladat nem kéri a tanult algoritmus alkalmazását, ezért bármilyen, helyes eredményre vezető és elvileg helyes számolás maximális pontszámot ér – akkor is, ha az fölöslegesen komplikált vagy nem felel meg az algoritmus pontos alkalmazásának. Ha azonban egy megoldás nem (pontosan) követi az algoritmust, akkor a számítások helyessége és az azokból levont következtetések indoklásra szorulnak. Így ha egy megoldó pusztán egy, az algoritmus pontos alkalmazásának nem megfelelő számítást magyarázat nélkül közöl, az nem érhet maximális pontszámot; az ilyen megoldásokra az algoritmus alkalmazásáért járó első 8 pontból legföljebb 5 pont adható.

Második megoldás. Figyeljük meg, hogy $10^4 = 10000 \equiv 2 \pmod{9998}$. (2 pont)
Ezt 5-ödik hatványra emelve: $10^{20} \equiv 2^5 = 32 \pmod{9998}$. (3 pont)
Mindkét oldalt $10^3 = 1000$-rel szorozva: $10^{23} \equiv 32000 \equiv 2006 \pmod{9998}$. (3 pont)
Ezt 6-tal szorozva: $6 \cdot 10^{23} \equiv 6 \cdot 2006 = 12036 \equiv 2038 \pmod{9998}$. Így a keresett maradék a 2038.(2 pont)

3. Egy szabályos téglatest alakú láda sík felületű, lejtős talajon áll. A láda $A(1; 4; 2)$ csúcsa a talajon van, az ezzel szomszédos $B(4; 2; 1)$ csúcsa viszont nincs a talajon. Metszi-e a talaj síkja a z-tengelyt? Ha igen, hol?

* * * * *

A talaj S síkjának normálvektora $\underline{n} = \overrightarrow{AB}$, (1 pont)
hiszen ez merőleges az S síkra (mert a téglatest oldaléle merőleges az alap síkjára). (1 pont)
Az A-ba, illetve B-be mutató helyvektorokat $\underline{a}$-val, illetve $\underline{b}$-vel jelölve $\underline{n} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (4; 2; 1) - (1; 4; 2) = (3; -2; -1)$. (2 pont)
Így S egyenletét $\underline{n}$ és A alapján felírva: $3x - 2y - z = -7$. (3 pont)
A z-tengely pontjai azok, amikre $x = y = 0$ teljesül. Ezt S egyenletébe helyettesítve $-z = -7$, vagyis $z = 7$ adódik. Így S a $(0; 0; 7)$ pontban metszi a z-tengelyt. (3 pont)

4. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 19 \\ 29 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}.$$

* * * * *

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} + \delta \cdot \underline{d} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárokra. (1 pont)
Behelyettesítve az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokat és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta &= 0 \\ \alpha + 5\beta &= 0 \\ 17\alpha + 19\beta + 2\gamma + 4\delta &= 0 \\ 23\alpha + 29\beta + 5\gamma + p \cdot \delta &= 0 \end{aligned}$$ (1 pont)

A második egyenletből az elsőt kivonva $\beta = 0$. Ezt az első két egyenlet bármelyikébe visszahelyettesítve $\alpha = 0$ adódik. (1 pont)
Így a harmadik és negyedik egyenletből álló rendszer erre egyszerűsödik: $2\gamma + 4\delta = 0$, $5\gamma + p \cdot \delta = 0$.(0 pont)
Itt az utóbbi egyenletből az előbbi $\frac{5}{2}$-szeresét kivonva: $(p - 10) \cdot \delta = 0$. (1 pont)
Ha $p \neq 10$, akkor ebből az egyenletből $\delta = 0$ adódik. Ezt pedig a $2\gamma + 4\delta = 0$ egyenletbe visszahelyettesítve $\gamma = 0$ is következik. (1 pont)
Így a tanultak szerint minden $p \neq 10$ értékre $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan függetlenek (mert $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{0}$ csak az $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ esetben lehet lehetséges). (2 pont)
Ha viszont $p = 10$, akkor a $(p - 10) \cdot \delta = 0$ egyenlet semmitmondó. Ekkor például a $\gamma = 2$, $\delta = -1$, $\alpha = \beta = 0$ megoldása a fenti lineáris egyenletrendszernek (vagyis $2\underline{c} - \underline{d} = \underline{0}$). (1 pont)
Így a tanultak szerint a $p = 10$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan összefüggőek. (2 pont)
Ha egy megoldó csak annyit figyel meg, hogy a $p = 10$ esetben $\underline{d} = 2\underline{c}$, akkor ezért megkaphatja a pontozás szerinti utolsó előtti 1 pontot; ha pedig ebből helyesen levonja és megindokolja azt a következtetést, hogy a $p = 10$ esetben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan összefüggők (mert $\underline{d} = 0\underline{a} + 0\underline{b} + 2\underline{c}$), akkor a pontozás szerinti utolsó 2 pontot is. Ha egy megoldó csak azt vizsgálja, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ milyen p értékekre teljesül és tévesen azt gondolja, hogy ez elegendő a lineáris függetlenség vizsgálatához, az alapvető elvi hibának minősül és így (helyes számolást és eredményt feltételezve is) legföljebb csak 3 pont járhat érte (úgy értve, hogy ez nem adódhat hozzá az imént írt 1+2 ponthoz, hanem a kettő közül legföljebb az egyiket adjuk meg). (Ez természetesen nem vonatkozik egy olyan megoldásra, ami először megmutatja $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineáris függetlenségét, majd az újonnan érkező vektor lemmájára hivatkozva állítja, hogy a négy vektor lineáris függetlensége ekvivalens $\underline{d} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$-vel; egy ilyen megoldás elvileg hibátlan lehet és nyilván maximális pontot érhet.)
A megoldás során adódó lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval is megoldható (annak ellenére is, hogy ez nem az első zárthelyi anyagában szerepel). Ha valaki így dolgozik, akkor az eliminációért a fenti pontozás szerinti harmadiknak és negyediknek írt 1+1 pont jár, a többi (az egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságára, illetve a vektorok lineáris függetlenségére) vonatkozó következtetés pontozása megfelel a fentieknek.

5. A $V \leq \mathbb{R}^5$ altér azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból áll, amiknek az első három koordinátája (fölülről lefelé) számtani sorozatot alkot, az utolsó három koordinátája pedig (szintén fölülről lefelé) 2 kvóciensű mértani sorozatot alkot. (Így például a jobbra látható vektor V-beli.) Határozzuk meg $\dim V$-t, a V altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy V valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 11 \\ 22 \\ 44 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Ha egy $\underline{v} \in V$ vektor első három koordinátája alkotta számtani sorozat első tagja α, a differenciája pedig δ, akkor a feladat szövegéből $\underline{v} = (\alpha, \alpha+\delta, \alpha+2\delta, 2\alpha+4\delta, 4\alpha+8\delta)^T$. (0 pont)
Ezért minden $\underline{v} \in V$ felírható így: $\underline{v} = \alpha \cdot (1,1,1,2,4)^T + \delta \cdot (0,1,2,4,8)^T$. (2 pont)
Ez tehát azt jelenti, hogy a $\underline{b}_1 = (1,1,1,2,4)^T$ és $\underline{b}_2 = (0,1,2,4,8)^T$ vektorok generátorrendszert alkotnak V-ben. (2 pont)
Másrészt $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ lineárisan független rendszer, mert egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. (2 pont)
Így $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázis V-ben, (2 pont)
vagyis $\dim V = 2$. (2 pont)
(A $\underline{v}^T$ jelölés a $\underline{v}$ sorvektorból oszlopvektort készít, illetve fordítva; itt a T a *transzponálás* rövidítése, ezt a tárgyban később általánosabban is definiáljuk, itt csak helytakarékosság céljából használtuk.)

Második megoldás. A tanult eljárást használjuk V egy bázisának az elkészítésére. (0 pont)
Ehhez először választunk egy tetszőleges $\underline{b}_1 \in V$, $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$ vektort: például $\underline{b}_1 = (1,0,-1,-2,-4)^T$. (1 pont)
Ekkor $\underline{b}_1$ nem generátorrendszer V-ben például azért, mert $\langle \underline{b}_1 \rangle$ minden elemének második koordinátája 0, így könnyen választhatunk egy $\underline{b}_2 \in V$, $\underline{b}_2 \notin \langle \underline{b}_1 \rangle$ vektort: legyen például $\underline{b}_2 = (0,1,2,4,8)^T$. (2 pont)
Most azt kell megvizsgálnunk, hogy $V = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ már igaz-e. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ vektort. Ekkor $\underline{v} = \alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2$ valamilyen α, β skalárokra, (1 pont)
vagyis $\underline{v} = (\alpha, \beta, -\alpha+2\beta, -2\alpha+4\beta, -4\alpha+8\beta)^T$. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy minden $\underline{v} \in V$ vektor felírható ilyen alakban. Valóban, ha egy $\underline{v} \in V$ első két koordinátája α, illetve β, akkor az első három koordináta alkotta számtani sorozat differenciája $\beta - \alpha$, így $\underline{v}$ harmadik koordinátája $\beta + (\beta - \alpha) = -\alpha + 2\beta$. Innen pedig $\underline{v}$ negyedik és ötödik koordinátája valóban $-2\alpha + 4\beta$, illetve $-4\alpha + 8\beta$, mert az utolsó három koordináta 2 kvóciensű mértani sorozatot alkot. (1 pont)
Így $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ már generátorrendszert alkot V-ben. (2 pont)
A tanult eljárást követve tehát a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázist kaptuk V-ben, amiből $\dim V = 2$. (2 pont)
(Az olyan „megoldások”, amik mindössze arra hivatkoznak, hogy egy $\underline{v} \in V$ vektor első két koordinátáját lerögzítve a többi már egyértelműen adódik, így „V elemeinek két szabad paramétere van”, ezért $\dim V = 2$, alapvető elvi hibán alapulnak és így nem érnek pontot.)

6*. Adjuk meg 1024 összes cinkosát (vagyis az összes olyan 1024-nél kisebb, pozitív egészt, amik a Fermat-teszt végrehajtásakor nem tanúsítják 1024 összetett voltát).

* * * * *

Legyen a az 1024 egy tetszőleges cinkosa. Ekkor tehát $1 \leq a \leq 1023$, $(a, 1024) = 1$ és $a^{1023} \equiv 1 \pmod{1024}$ (a cinkos definíciója szerint). (1 pont)
Mivel $1024 = 2^{10}$, ezért a tanult tétel szerint $\varphi(1024) = 2^{10} - 2^9 = 512$. (1 pont)
Mivel $(a, 1024) = 1$, ezért alkalmazható az Euler-Fermat tétel: (1 pont)
$a^{512} \equiv 1 \pmod{1024}$. (1 pont)
Ezt négyzetre emelve: $a^{1024} \equiv 1^2 = 1 \pmod{1024}$. (1 pont)
Ezekből $1 \equiv a^{1024} = a^{1023} \cdot a \equiv 1 \cdot a = a \pmod{1024}$, vagyis $a \equiv 1 \pmod{1024}$. (3 pont)
Ebből pedig $1 \leq a \leq 1023$ miatt $a = 1$ adódik. (1 pont)
Mivel 1 nyilván cinkosa 1024-nek, hiszen $(1, 1024) = 1$ és $1^{1023} = 1 \equiv 1 \pmod{1024}$, (1 pont)
ezért 1024 egyetlen cinkosa az 1. (0 pont)
(A fenti pontozás szerinti 3 pont megszerzéséhez meggyőzően kell indokolni, hogy az $a^{1023} \equiv 1 \pmod{1024}$ és $a^{1024} \equiv 1 \pmod{1024}$ kongruenciákból $a \equiv 1 \pmod{1024}$ valóban következik.)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. december 1.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 24x_3 + (3p-1)\cdot x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 17x_2 + 22x_3 + (q-5p)\cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

* * * * *

Első megoldás. A feladatbeli lineáris egyenletrendszernek biztosan van megoldása a p és q minden értékére: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. (2 pont)

Ha egy lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, akkor (a tanult tétel szerint) ebben az egyenletek száma legalább annyi, mint az ismeretlenek száma. Így a feladatbeli egyenletrendszer biztosan nem egyértelműen megoldható (mivel három egyenletből áll és négy ismeretlen van benne). (3 pont)

Minden lineáris egyenletrendszerre igaz (a tanultak szerint), hogy vagy nincs megoldása, vagy egyértelműen megoldható, vagy végtelen sok megoldása van, (2 pont)

és a fentiek szerint az első két eset kizárt, így az egyenletrendszernek a p és q minden értékére végtelen sok megoldása van. (3 pont)

Második megoldás. A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & -4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -24 & 3p-1 & 0 \\ 3 & 17 & 22 & q-5p & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrc|r} 1 & 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 3p+9 & 0 \\ 0 & 5 & 31 & q-5p+15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrc|r} 1 & 4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -p-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \quad (2 \text{ pont})$$

Ezzel elértük a lépcsős alakot, majd az algoritmus végrehajtását a második fázissal folytatjuk a redukált lépcsős alakig: (0 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 3q+85 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p-6q-183 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4p+27q+817 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p-6q-183 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q+30 & 0 \end{array}\right) \quad (2 \text{ pont})$$

A kapott redukált lépcsős alak szerint $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = (-4p - 27q - 817)\cdot\alpha$, $x_2 = (p + 6q + 183)\cdot\alpha$ és $x_3 = (-q-30)\cdot\alpha$. (3 pont)

Így p és q minden értékére végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek. (3 pont)

Ha egy megoldó akár a lépcsős alak, akár a redukált lépcsős alak elérése után abbahagyja a számolást és úgy érvel, hogy mivel tilos sor nem keletkezett az első fázis végén, viszont a negyedik oszlopban nincs vezéregyes és így x_4 szabad paraméter, ezért mindenképp végtelen sok megoldás lesz, az természetesen teljes értékű megoldás és így maximális pontszámot ér. A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. A redukált lépcsős alak helytelen értelmezése viszont elvi hibának számít, ilyen esetben a pontozás szerinti utolsó 3+3 pont elveszik. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 1-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

2. Legyen $\pi = (5, 2, 6, 1, 4, 3)$ (vagyis π az $1, 2, \ldots, 6$ számoknak az a permutációja, amire $\pi_1 = 5$, $\pi_2 = 2$, $\ldots$, $\pi_6 = 3$). A 6×6-os A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \geq \pi_i, \\ 0, & \text{ha } j < \pi_i \end{cases}$$

minden $1 \leq i, j \leq 6$ esetén (vagyis minden i-re az i-edik sorban a π_i-edik helyen és attól jobbra mindenhol 1-es áll, a π_i-edik helytől balra pedig 0). Számítsuk ki $\det A$ értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg $\det A$ értékét.)

* * * * *

A definíció szerint összeadandóként szereplő szorzatok közül nem kell figyelembe venni azokat, amik tartalmaznak 0 tényezőt, mert ezek értéke 0, így 0-val járulnak hozzá a determináns értékéhez. (1 pont)
Egy 0-t nem tartalmazó szorzatban a 3. sorból csak a 6. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_3 = 6$ miatt a sor első 5 eleme 0. (1 pont)
Ezért az 1. sorból már csak az 5. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_1 = 5$ miatt a sor első 4 eleme 0 és a 6. oszlopból már választottunk elemet. (1 pont)
Hasonlóan: az 5. sorból csak a 4. helyen álló 1-es választható, mert $\pi_5 = 4$ miatt a sor első 3 eleme 0 és az utolsó két oszlopból már választottunk elemet. Így folytatva végül azt kapjuk, hogy az egyetlen nemnulla szorzat épp a π permutációnak megfelelő szorzat. (2 pont)
Ennek a szorzatnak az értéke nyilván $1^6 = 1$, (1 pont)
az előjeléhez pedig meghatározzuk π inverziószámát: $I(\pi) = 4 + 1 + 3 + 0 + 1 + 0 = 9$ (ahol az elemekhez sorra a tőle jobbra álló, nála kisebb elemek száma szerepel összeadandóként). (1 pont)
Mivel $I(\pi)$ páratlan, a π-hez tartozó szorzat negatív előjelet kap. (1 pont)
Így definíció szerint $\det A = -1$ (mert a $6! = 720$ összeadandó közül az egyik (-1), a többi 0). (2 pont)
Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba, figyelmetlenség 1 pont levonást jelent. A determináns definíciója ismeretének (akár részleges) hiányára utaló elvi hibák azonban darabonként 4 pont levonást jelentenek.

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 6 & 17 & 19 & 23 \\ 12 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Vonjuk ki a harmadik oszlopot a negyedikből és az ötödikből. Ezek a lépések (a tanultak szerint) a determináns értékét nem változtatják. (4 pont)
Ezzel a negyedik oszlop $(0, 2, 0, 0, 0)^T$, az ötödik $(0, 6, 0, 0, 0)^T$ lett. (1 pont)
Most vonjuk ki a negyedik oszlop háromszorosát az ötödik oszlopból. A determináns értékét ez a lépés sem változtatja. (2 pont)
Ezzel az ötödik oszlop csupa nullává változott. (1 pont)
A csupa nulla oszlop miatt (a tanultak szerint) a determinás értéke 0 (és így ugyanez igaz az eredeti determinánsra is). (2 pont)

Második megoldás. Vonjuk ki az első sort a harmadikból, a negyedikből és az ötödikből. Ezek a lépések (a tanultak szerint) a determináns értékét nem változtatják. (3 pont)
A kapott mátrixban a jobb alsó, háromszor hármas részmátrix minden eleme 0. (1 pont)
Ha most ennek a mátrixnak a determinánsát a definíció szerint számítjuk ki, akkor mindegyik bástyaelhelyezéshez tartozó szorzat tartalmaz 0 elemet. Valóban: ha az utolsó három sorból nemnulla elemet akarunk választani, akkor ezt csak az első két oszlopból tehetjük meg; mivel azonban minden oszlopból csak egy elemet lehet választani, ez lehetetlen. (3 pont)
Így a definíció szerinti kiszámításkor $5! = 120$ darab előjelezett 0-t adunk össze. Ezért a determináns értéke 0 (és ugyanez igaz az eredeti determinánsra is). (3 pont)

Harmadik megoldás. A Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatát alkalmazzuk:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 6 & 17 & 19 & 23 \\ 12 & -9 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1/4 & 9/4 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 9/4 & 9/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & -31 & -31 & -31 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) nem ér pontot, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

4. a) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak, és p-nek azokra az értékeire, amikre A^{-1} létezik, adjuk is meg azt.

b) Azokra a p-kre, amikre A^{-1} létezik, határozzuk meg az $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) + (A - E)^2$ mátrixot.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2p & p+1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) $\det A = 2 \cdot (p+1) - 2p = 2$ (a 2×2-es determináns kiszámításáról tanultak szerint). (1 pont)
Mivel $\det A \neq 0$ igaz minden p-re, ezért (a tanult tétel szerint) A^{-1} létezik a p minden értékére. (1 pont)
A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2p & p+1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & p+1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -p & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

A tanultak szerint A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
A tanultak szerint A^{-1} létezése mellett úgy is érvelhetünk (illetve a fenti pontozás szerinti első 1+1 pontot úgy is megszerezhetjük), hogy mivel a Gauss-elimináció során a vonaltól balra a p minden értékére egységmátrix keletkezett, ezért A^{-1} létezik a p minden értékére. A megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hibák 1 pont levonást jelentenek, de az A^{-1} számítására vonatkozó alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pontot.

b) $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot A - E \cdot A^2 + E \cdot A = E \cdot A - E - A^2 + A = -A^2 + 2A - E$. (2 pont)
$(A - E)^2 = (A - E) \cdot (A - E) = A \cdot A - A \cdot E - E \cdot A + E^2 = A^2 - A - A + E = A^2 - 2A + E$. (2 pont)
Így $(A^{-1} - E) \cdot (A^2 - A) + (A - E)^2 = -A^2 + 2A - E + A^2 - 2A + E = 0$, vagyis az eredmény a nullmátrix. (1 pont)
(A fenti számításokhoz a mátrixokon végzett műveletek tanult tulajdonságait használtuk: disztributivitás, asszociativitás, a skalár szorzó kiemelhetősége és az E-vel végzett szorzás tulajdonsága.) (0 pont)

A b) feladat természetesen megoldható az egyes tényezők közvetlen kiszámításával is:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2p+4 & p+3 \\ 2p^2+6p & p^2+4p+1 \end{pmatrix}, A^2 - A = \begin{pmatrix} 2p+2 & p+2 \\ 2p^2+4p & p^2+3p \end{pmatrix}, (A-E)^2 = \begin{pmatrix} 2p+1 & p+1 \\ 2p^2+2p & p^2+2p \end{pmatrix}$$

és $(A^{-1}-E)\cdot(A^2-A)$ az utóbbi mátrix ellentettje. Ha valaki így dolgozik, akkor a fenti három mátrix kiszámítása 1-1 pontot ér és az $(A^{-1}-E)\cdot(A^2-A)$ szorzat, valamint ezekből a végeredmény kiszámítása további 1-1 pontot. ($A^{-1}-E$ kiszámítása önmagában nem ér pontot.) A megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hibák 1-1 pont levonást jelentenek, de az A^{-1} számítására vagy a mátrixszorzás elvégzésére vonatkozó alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pontot.

5. Legföljebb hányat lehet kiválasztani az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok közül úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A keresett érték az öt felsorolt vektor egyesítésével keletkező 4×5-ös mátrix rangja (az oszloprang definíciója szerint). (4 pont)

A rangot a tanultak szerint Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 2 & 4 & 10 \\ 3 & 21 & -3 & -6 & -11 \\ 2 & 15 & -1 & -1 & -11 \\ -1 & -2 & 6 & 17 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 15 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(3 pont)}$$

A kapott mátrix lépcsős alakú, így a rangja a sorainak (avagy a vezéregyeseinek) a száma: 3. (3 pont)

Így a felsorolt öt vektor közül legföljebb 3-at lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek. (0 pont)

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. (A pontozás szerinti utolsó 3 pont természetesen megadható akkor, ha egy hibás számolás eredményeképpen kapott lépcsős alakú mátrix rangját valaki helyesen állapítja meg.) Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó nem közvetlenül a Gauss-eliminációt alkalmazza (vagyis nem annak a pontos követésével jut el egy lépcsős alakig), akkor indokolnia kell a megoldás helyességét – vagyis hivatkoznia kell arra, hogy a megtett lépések a tanultak szerint a rangot nem változtatják; ennek híján az utolsó 3 pontot nem szerezheti meg.

6*. Az $n \times n$-es A mátrixra $A + A^2 + A^3 = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$ vagy $\det A = 1$.

* * * * *

Ha $\det A = 0$, akkor ez megfelel a feladat állításának. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $\det A \neq 0$ (és célunk megmutatni, hogy $\det A = 1$). (1 pont)

Mivel $\det A \neq 0$, ezért A-nak létezik inverze. (1 pont)

Szorozzuk meg (balról) az $A + A^2 + A^3 = 0$ egyenletet A^{-1}-zel: $A^{-1} \cdot (A + A^2 + A^3) = A^{-1} \cdot 0$. (1 pont)

A jobb oldalon nyilván 0-t kapunk (mert a nullmátrixot bármivel szorozva az eredmény szintén 0).(1 pont)

A bal oldalon a zárójel felbontása után $A^{-1} \cdot A = E$ (és az E-vel való szorzás tulajdonsága) miatt kapjuk: $E + A + A^2 = 0$. (1 pont)

(Itt a felsoroltakon kívül használtuk a mátrixszorzás disztributivitását és asszociativitását is.) (0 pont)

Ebből $A^2 + A = -E$. Ezt az $A + A^2 + A^3 = 0$ egyenletbe helyettesítve: $A^3 - E = 0$, vagyis $A^3 = E$.(2 pont)

A determinánsok szorzástételét (kétszer) alkalmazva: $\det A^3 = (\det A)^3$. (1 pont)

Így $A^3 = E$ és $\det E = 1$ miatt $(\det A)^3 = 1$, amiből $\det A = 1$ valóban következik. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Első pótzárthelyi — pontozási útmutató
2023. november 17.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. A Nagy Piréz Rendszer harmadik bolygóján ősidők óta minden hónap 29 napos, az év végén visszamaradó 22 napot pedig a messzeföldön híres piréz kumisz mértéktelen fogyasztásával töltik a lakosok. A Piréz Nemzeti Bank mélyreható elemzése azonban nemrég kimutatta, hogy a gazdaság teljesítményére az év végi 22 napos szünet kedvezőtlen hatással van, ezért bevezetik a 32 napos hónapot, így a hónapokból kimaradó napok száma 5-re csökken. Hány napból áll az év a harmadik bolygón, ha tudjuk, hogy a negyedik bolygó éve (ami persze hosszabb a harmadikénál) 1000 napos?

* * * * *

Az év napjainak számát a harmadik bolygón n-nel jelölve a feladat szövegéből az $n \equiv 22 \pmod{29}$ és $n \equiv 5 \pmod{32}$ kongruenciákat kapjuk. (2 pont)

A kongruenciarendszert a tanult módszerrel oldjuk meg. Az első kongruenciából $n = 29k + 22$ valamilyen k egészre. Ezt a második kongruenciába helyettesítve: $29k + 22 \equiv 5 \pmod{32}$. Mindkét oldalból 22-t levonva a $29k \equiv -17 \pmod{32}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)

Mivel $(29, 32) = 1$ (pl. mert 29 prím és 32 nem a többszöröse) és $1|5$, ezért a tanult tételt szerint a lineáris kongruencia megoldható és egy megoldása van modulo 32. (1 pont)

A bal oldalból $32k$-t levonva és a jobb oldalhoz 32-t adva (az eredetivel ekvivalens) $-3k \equiv 15 \pmod{32}$ kongruencia adódik. (1 pont)

Ezt (-3)-mal osztva, majd a jobb oldalhoz 32-t adva (ez utóbbi igazából el is maradhat) $k \equiv 27 \pmod{32}$, ahol a modulus azért nem változott, mert 32 és -3 relatív prímek. (1 pont)

Mivel a kongruenciának más megoldása nem lehet, de tudjuk, hogy egy megoldásnak lennie kell modulo 32, a kapott 27 érték valóban a megoldás. (1 pont)

Így $k = 32m + 27$ valamilyen m egészre, ezt behelyettesítve $n = 29(32m + 27) + 22 = 928m + 805$. (2 pont)

Az ilyen n-ek közt egy olyan van, ami pozitív és 1000-nél kisebb, nevezetesen 805, ez a keresett szám. (1 pont)

Azt, hogy a kongruenciának valóban az egyetlen megoldása a 27 persze máshogy is be lehet látni, pl. úgy, hogy ellenőrizzük, hogy minden átalakításunk ekvivalens átalakítás volt, erre is jár az 1+1 pont.
A megoldás közben előállt lineáris kongruencia természetesen más módszerekkel, így akár az Euklideszi algoritmussal is megoldható; ezzel dolgozva sorra a $32k \equiv 0 \pmod{32}$, $29k \equiv -17 \pmod{32}$, $3k \equiv 17 \pmod{32}$, $2k \equiv -10 \pmod{32}$, $k \equiv 27 \pmod{32}$ kongruenciák keletkeznek. Ekkor a lineáris kongruencia megoldásáért járó 4 pontból 1 pontot ér az a tény, hogy a megoldó az algoritmust alkalmazza (amit nem kell feltétlen megneveznie, elég, ha az alkalmazása révén ezt egyértelműen demonstrálja); további 1 pontot ér annak az ellenőrzése, hogy az eljárás a tanultak szerint leosztás nélkül (vagyis az első fázis kihagyásával) alkalmazható, mert $(29, 32) = 1$; végül 2 pontot ér maga a számolás.

2. Mennyi maradékot ad 499^{4201} 539-cel osztva?

* * * * *

499 és 539 relatív prímek, mert $539 = 7^2 \cdot 11$, 499 pedig sem 7-tel, sem 11-gyel nem osztható (persze rengeteg más indoklás is adható). (1 pont)
Az Euler-Fermat tétel szerint $499^{\varphi(539)} \equiv 1 \pmod{539}$. (2 pont)
A tételt azért tudtuk használni, mert 499 és 539 relatív prímek, mint azt már korábban láttuk. (2 pont)
A tanultak szerint $\varphi(539) = (7^2 - 7)(11 - 1) = 420$. (2 pont)
Az eddigiek alapján tehát $499^{420} \equiv 1 \pmod{539}$, (1 pont)
ezt a tizedik hatványra emelve $499^{4200} \equiv 1 \pmod{539}$, (1 pont)
mindkét oldalt 499-cel szorozva pedig $499^{4201} \equiv 499 \pmod{539}$ adódik, (1 pont)
a keresett maradék tehát 499. (0 pont)

3. Legyen $\underline{i} = (3; 0; -1)$ irányvektora az e és az f egyenesnek is. Az e egyenes tartalmazza a $(3; 1; 2)$ pontot, f pedig az $(5; -1; 1)$ pontot. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, mely e-t és f-et is tartalmazza.

* * * * *

A keresett sík $\underline{n} = (a, b, c)$ normálvektora merőleges $\underline{i}$-re (1 pont)
és a két megadott pont egyikéből a másikba mutató vektorra is. (1 pont)
Ilyen vektor az $(5; -1; 1) - (3; 1; 2) = (2; -2; -1)$. (1 pont)
Így $\underline{n}$ skalárszorzata $\underline{i}$-vel és a $(2; -2; -1)$ vektorral is 0, (2 pont)
vagyis $3a - c = 0$ és $2a - 2b - c = 0$. (1 pont)
Ennek az egyenletrendszernek megoldása (pl.) $a = 2, b = -1, c = 6$. (2 pont)
A sík egyenlete a normálvektor és az egyik megadott pont alapján így $2x - y + 6z = 17$. (2 pont)

Teljes megoldáshoz meg kéne indokolni, hogy az így kapott sík valóban tartalmazza mindkét egyenest, ennek hiányáért azonban ne vonjunk le pontot. Aki helyes indoklást ad és ebben a feladatban pontot vesztene, az kapjon egy extra pontot. A normálvektort most már vektoriális szorzattal is ki lehet számolni, hiszen szerepelt az előadáson, természetesen erre is jár a vonatkozó 5 pont ha a felírás és a számolás helyes – elvi hibáért (pl. a sakktábla szabály használatának elmulasztása) 4, számolási hibáért 1 pontot vonjunk le.

4. A $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azon vektorokból áll, melyeknek az első 4 koordinátája számtani sorozatot alkot, az utolsó koordináta pedig az első 4 koordináta összege. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V-beli. Altér-e V $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyenek $\underline{x}$ és $\underline{y}$ tetszőleges V-beli vektorok, λ pedig tetszőleges valós szám. (0 pont)
V leírása alapján $\underline{x} = (a, a + d, a + 2d, a + 3d, 4a + 6d)^T$ és $\underline{y} = (b, b + c, b + 2c, b + 3c, 4b + 6c)^T$ valamely a, b, c, d számokra. (1 pont)

Ekkor $\underline{x}+\underline{y}=(a+b, a+b+d+c, a+b+2d+2c, a+b+3d+3c, 4a+4b+6d+6c)^T$, (1 pont)
ami V-ben van, hiszen a számtani sorozat első elemét $(a+b)$-nek, a differenciáját pedig $(c+d)$-nek választva épp ezt a vektort kapjuk. (2 pont)
$\lambda\underline{x}=(\lambda a, \lambda(a+d), \lambda(a+2d), \lambda(a+3d), \lambda(4a+6d))^T$, (1 pont)
ami szintén V-ben van, hiszen a számtani sorozat első elemét λa-nak, a differenciáját pedig λd-nek választva épp ezt a vektort kapjuk. (2 pont)
Mivel V akkor és csak akkor alkot alteret, ha nem üres (ha ez kimarad, azért ne vonjunk le pontot, ha viszont valaki megemlíti és ebben a feladatban pontot veszítene, akkor adjunk egyet) és bármely két V-beli vektor összege is V-beli, továbbá bármely V-beli vektor bármely skalárszorosa is V-beli, a fentiek szerint V altér. (3 pont)

Az utolsó 3 pont természetesen csak akkor jár a megoldónak, ha úgy teszi a vonatkozó megállapítást, hogy korábban valóban foglalkozott V-beli vektorok összegének és skalárszorosának vizsgálatával.

5. Mely p valós számok esetén teljesül, hogy a jobbra látható vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ bázisává lehet kiegészíteni?

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\p\\p\end{pmatrix}$$

* * * * *

A tanultak szerint a lineárisan független vektorrendszerek kiegészíthetők bázissá. (2 pont)
Ha egy rendszer nem lineárisan független, akkor viszont nem egészíthető ki bázissá, mert bármely vektort hozzávéve továbbra sem lesz független, a bázisoknak viszont függetleneknek kell lenniük. (E megjegyzés hiányáért ne vonjunk le pontot, aki viszont leírja és ebben a feladatban pontot vesztene, annak adjunk egy extra pontot.) (0 pont)

A függetlenség vizsgálatához tekintsük az $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\p\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\p\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ egyenlőséget.
(1 pont)

Innen az

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma &= 0\\ \alpha+\beta+\gamma &= 0\\ \alpha+\beta+\gamma p &= 0\\ \alpha+\beta p+\gamma p &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. (1 pont)
Az első egyenletet a harmadikból levonva $(p-1)\gamma=0$, így ha $p\neq 1$, akkor $\gamma=0$. (1 pont)
A harmadik egyenletet a negyedikből levonva $(p-1)\beta=0$, így ha $p\neq 1$, akkor $\beta=0$. (1 pont)
Mindezek alapján ha $p\neq 1$, akkor β és γ mellett az első egyenlet miatt α is 0 kell legyen, (1 pont)
vagyis a kérdéses vektoroknak ekkor csak a triviális lineáris kombinációja adja a nullvektort, tehát ekkor a vektorok lineárisan függetlenek. (2 pont)
Ha azonban $p=1$, akkor a vektorrendszer nem lineárisan független, hiszen (pl.) az $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=0$ skalárokkal vett lineáris kombináció is a nullvektort adja (de persze hivatkozhatunk arra is, hogy ugyanaz a vektor egynél többször szerepel a rendszerben). (1 pont)
A rendszer tehát pontosan $p\neq 1$ esetén egészíthető ki bázissá. (0 pont)

6*. Adjuk meg az összes olyan x egész számot, melyre $x^6\equiv 2 \pmod{201}$.

* * * * *

Legyen x olyan szám, melyre a fenti kongruencia teljesül. Mivel 2 és 201 relatív prímek, a tanultak szerint x^6 és 201 is relatív prímek kell legyenek, (1 pont)
amiből következik, hogy x és 201 is relatív prímek. (1 pont)
Az Euler-Fermat tétel szerint így $x^{\varphi(201)}\equiv 1 \pmod{201}$. (2 pont)

Mivel $\varphi(201) = (3-1)(67-1) = 132$, $x^{132} \equiv 1 \pmod{201}$. (1 pont)
Az $x^6 \equiv 2 \pmod{201}$ kongruenciát a 22. hatványra emelve $x^{6\cdot 22} = x^{132} \equiv 2^{22} \pmod{201}$. (2 pont)
$2^{22} \equiv 37 \pmod{201}$ (ez kideríthető ismételt négyzetre emelések segítségével (az adódó maradékok sorban 2,4,16,55,10) vagy pl. az alapján, hogy $2^{11} = 2048$ 38 maradékot ad 201-gyel osztva, $38^2 = 1444$ pedig 37 maradékot ad 201-gyel osztva). (2 pont)
Ezek alapján tehát $x^{132} \equiv 37 \pmod{201}$, ami ellentmond a korábban látottaknak, így a fenti tulajdonságú x szám nem létezik. (1 pont)

Az Euler-Fermat tétel felírásáért természetesen csak akkor jár pont, ha az valóban haszonnal jár a feladat megoldása szempontjából, tehát pl. x-et és nem x^6-t vagy 2-t emeljük a 132. hatványra. Hasonlóképpen nem ér pontot $\varphi(201)$ meghatározása, ha ez a feladat megoldását nem viszi előre.

Bevezetés a számításelméletbe I.
második pótzárthelyi — pontozási útmutató
2023. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Létezik-e az alábbi egyenletrendszernek olyan megoldása, melyre $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

* * * * *

Az egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 10 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$. (0 pont)

Gauss-eliminációt használunk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ (3 pont)

A redukált lépcsős alak alapján az egyenletrendszer megoldásai $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = \alpha - 2, x_2 = -\alpha, x_4 = 1$. (3 pont)
A kapott értékeket az $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$ egyenlőségbe helyettesítve $\alpha - 2 = 3 - 2 + 1$ adódik, (2 pont)
vagyis az egyenlőség $\alpha = 4$ mellett teljesül. (1 pont)
Mivel α bármilyen valós értéket felvehet, így $\alpha = 4$ is lehetséges, az egyenletrendszernek tehát

van a feltételnek megfelelő megoldása. (1 pont)

2. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix determinánsát a p valós paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Gauss-eliminációt fogunk használni, de ezt megelőzően kicseréljük a második és a negyedik sort, ami a determinánst a (-1)-szeresére változtatja.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & p & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & p-2 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & p-2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & p-3 & 13p-31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 16p-40 \end{vmatrix} =$$

$= 16p - 40.$ (10 pont)

A determinánst természetesen más tanult módszerrel (pl. kifejtési tétel) is meg lehet határozni. Aki helyesen írja fel a determinánst valamelyik sor vagy oszlop szerint kifejtve, de tovább nem jut, az 2 pontot kapjon. Aki a kifejtést megelőzően eléri, hogy a kifejtésre használt sorban vagy oszlopban 1, illetve 2 elem 0 legyen (természetesen a megfelelő indoklással), az 1, illetve 2 pontot kaphat ezért. Aki a kifejtés során adódó 3×3-as mátrixokat is kifejti, az további 3 pontot kaphat. A determinánsra vonatkozó, de a tárgy anyagában nem szereplő állítások (pl. Sarrus-szabály) csak a vonatkozó állítás bizonyításával együtt használhatók. A Gauss-eliminációra hasonlító, de azt valójában nem követő megoldások csak akkor lehetnek teljes értékűek, ha az egyes lépések hatásairól szó esik. Ezek hiányáért darabonként 1 pontot vonjunk le, mint ahogy számolási hibákért is. Elvi hibákért (pl. sorcsere során a (-1)-gyel szorzás elmulasztása, a kifejtési tétel során rossz előjel használata, az előjelezés elmulasztása) viszont darabonként 4 pont levonás jár.

3. Legyenek A és B 2×2-es mátrixok. C legyen az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső és jobb felső 2×2-es részmátrixa A, bal alsó és jobb alsó 2×2-es részmátrixa B. Legyen továbbá D az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső 2×2-es részmátrixa A, jobb alsó 2×2-es részmátrixa B, a többi 8 eleme pedig 0.

a) Igaz-e, hogy ekkor $\det C = \det A \det B$ mindig teljesül?

b) Igaz-e, hogy ekkor $\det D = \det A \det B$ mindig teljesül?

* * * * *

a) Az állítás nem igaz. (0 pont)
Legyen pl. A és B is a 2×2-es egységmátrix, ekkor C-nek van két azonos sora, így a determinánsa 0, míg $A = B$ determinánsa 1, az egyenlőség tehát nem teljesül. (3 pont)

Természetesen rengeteg másik ellenpélda is adható. Hiányos megoldásra akkor jár részpontszám, ha a kérdéses determinánsokat a megoldó kiszámítja vagy ha erre nem kerül sor, akkor valamilyen meggyőző érv szól amellett, hogy az egyenlőség tényleg nem fog teljesülni. Ha az ellenpélda jó, de a determinánsok kiszámítása során a megoldó számolási hibát vét, akkor az ilyenekért darabonként 1 pontot vonjunk le. Rossz ellenpélda esetén a determinánsok kiszámításáért nem jár pont.

b) Az állítás igaz. (0 pont)

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, ekkor $D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$. (1 pont)

A determinánsa $ad - bc$, B determinánsa $eh - fg$. (1 pont)
Fejtsük ki D determinánsát az első sor szerint:

$$\det D = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két 3×3-as determinánst az első soruk szerint kifejtve:

$$\det D = a \cdot d \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - b \cdot c \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \qquad \text{(2 pont)}$$

$= (ad - bc) \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$, amiből a kívánt állítás azonnal adódik. (1 pont)

A determináns persze másképp is számítható, de ez a b) részben tipikusan elég körülményes. Elvi hibáért (bármely részben) darabonként 4 pontot vonjunk le.

4. Létezik-e olyan mátrix, melynek a jobbra látható mátrix az inverze? Ha igen, adjuk is meg.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen a feladatban szereplő mátrix A, olyan B mátrixot keresünk, melyre $B^{-1} = A$. (0 pont)
Ekkor $E = BB^{-1} = BA$ és $E = B^{-1}B = AB$ is teljesül, tehát B az A inverze kell legyen. (2 pont)
Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel a bal oldalon megkaptuk az egységmátrixot, A-nak létezik inverze (3 pont)
és az a jobb oldalon megjelenő mátrix, így ez lesz a keresett B. (1 pont)

Az inverz létezésének megmutatásáért járó pontok természetesen máshogy is megszerezhetők, pl.: a „(pontosan) akkor létezik az inverz, ha A determinánsa nem 0" állítás 1 pontot ér, A determinánsának kiszámítása pedig további 2-t. Aki a kapott inverzről ellenőrzi, hogy azzal balról, illetve jobbról beszorozva A-t egységmátrixot kapunk, ezért 1-1 pluszpontot kapjon, feltéve, hogy ezzel nem lépi túl a 10-et (a pontok akkor járnak, ha a szorzás helyes – nem szükséges, hogy jó mátrixot szorozzon A-val a megoldó).

5. Egy 5×5-ös A mátrix első négy sora lineárisan független, az első négy oszlopa pedig lineárisan összefüggő. Határozzuk meg A rangjának összes lehetséges értékét.

* * * * *

Mivel A-nak van négy független sora, a rangja legalább 4 (a sorrang definíciója szerint). (3 pont)
A első négy oszlopa összefüggő, így A összes oszlopa is összefüggő. (2 pont)
Valóban: ha A oszlopai függetlenek lennének, akkor (az előadáson tanultak szerint) az oszlopok bármely részhalmaza, így az első négy oszlop is független lenne. (2 pont)
Mivel A oszlopai összefüggők, az oszloprang definíciója miatt A rangja kisebb, mint 5, tehát legfeljebb 4 lehet, (3 pont)
a rang tehát pontosan 4. (0 pont)

Szigorúan véve még meg kéne indokolni, hogy a rang lehet is 4 (könnyű rá példát adni), de mivel a feladat szövegéből következtethetünk arra, hogy létezik ilyen mátrix és annak rangja csak 4 lehet, ennek hiányáért ne vonjunk le pontot. Ha viszont valaki kitér erre és jó példát ad meg, akkor kaphat egy extra pontot (persze csak akkor, ha egyébként nem lenne maximum pontos a megoldása).

6*. Az 5×5-ös A mátrixról annyit tudunk, hogy a rangja 3.

a) Mutassuk meg, hogy A-nak bármely elemét bárhogy megváltoztatva a kapott mátrix rangja legfeljebb 4 lesz.

b) Mutassuk meg, hogy A-nak létezik olyan eleme, melyet alkalmasan megváltoztatva a kapott mátrix rangja 4 lesz.

* * * * *

a) Ha az új mátrix rangja 5 lenne, akkor az oszlopai független rendszert alkotnának (az oszloprang definíciója szerint). (1 pont)
Ebben az esetben azonban az eredeti mátrixnak a cserében nem érintett négy oszlopa is független lenne, (1 pont)
hiszen ezek egy független rendszer részhalmazát alkotják. (1 pont)

b) Legyen B az A olyan 3×3-as részmátrixa, melynek determinánsa nem 0. Ilyen részmátrix a determinánsrang definíciója miatt létezik. (1 pont)
Legyen i egy olyan sor, j pedig egy olyan oszlop sorszáma, melyek nem szerepelnek B-ben és legyen C az a részmátrixa A-nak, mely B sorain és oszlopain kívül az i. sort és a j. oszlopot is tartalmazza. C determinánsa a determinánsrang definíciója miatt 0 kell legyen. (1 pont)
Azt állítjuk, hogy A-ban az i. sor j. elemét tetszőlegesen megváltoztatva 4 rangú mátrixot kapunk. (1 pont)
Ennek igazolására hajtsuk végre a változtatást C-ben is és nevezzük a kapott mátrixot C'-nek. C' determinánsát az (A-ban) i. sor szerint kifejtve C determinánsától különböző értéket kapunk, (1 pont)
mert az egyetlen változás C-nek az (A-ban) i. sor szerinti kifejtéséhez képest az i. sor j. elemének és a hozzá tartozó előjeles aldeterminánsnak a szorzatában mutatkozik. Mivel a szóban forgó előjeles aldetermináns vagy $\det B \neq 0$ vagy ennek a (-1)-szerese (ami szintén nem 0) és az i. sor j. elemét megváltoztattuk, ezért $\det C' \neq \det C = 0$. (2 pont)
Mivel a változtatás utáni mátrixnak van 4×4-es nem 0 determinánsú részmátrixa, a rangja legalább 4. (1 pont)
Az a) részfeladatban beláttuk, hogy a rang ennél több nem lehet, ezért pontosan 4 kell legyen. (0 pont)

Az utolsó részpont azért 0, hogy aki a vonatkozó megállapításról elfeledkezik, az ne veszítsen pontot. Aki azonban leírja (és vagy itt, vagy az előző részfeladatban be is látja) a megállapítást, annak adjunk 1 extra pontot, ha ezzel nem lépi túl a pontszám a 10-et.