Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2017. október 19.

1. Mennyi maradékot ad 176-tal osztva 799^{801}?

2. Egy n egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az n szám. Milyen maradékot adhat n 344-gyel osztva?

3. Tartalmazza-e az $R(1;3;4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1;7;-1)$ és a $Q(11;9;-5)$ pontokat összekötő egyenes a P-ben merőlegesen döf?

4. Tegyük fel, hogy az ($\mathbb{R}^n$-beli) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok lineárisan összefüggők, de közülük bármely 9-et kiválasztva lineárisan független vektorrendszert kapunk. Mutassuk meg, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok bármely $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjában vagy mindegyik együttható 0 vagy egyik együttható sem 0. (Azaz: mutassuk meg, hogy $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{10} \cdot \underline{v}_{10} = \underline{0}$ esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{10} = 0$ vagy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{10} \neq 0$ teljesül.)

5. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az altér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6*. Létezik-e páros Carmichael-szám?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. zárthelyi

2017. november 30.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+5x_3 &= 7 \\ 2x_1+9x_2+16x_3 &= 17 \\ x_1+p\cdot x_2+p\cdot x_3 &= 5 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4. a) Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.

b) $p=3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x, y \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & y & y \end{pmatrix}$$

6*. Egy 5×5-ös A mátrixnak pontosan hat olyan 3×3-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2017. december 11.

1. Adjuk meg az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy 51-gyel osztva 3 maradékot ad, továbbá a szám 17-szeresének utolsó két számjegye 15.

2. Milyen maradékot ad 108-cal osztva $73^{37} + 37^{73}$?

3. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 5^{85}-nek a 155-tel vett osztási maradékát.

4. Van-e az $A(-1;-2;1)$, $B(3;1;3)$ és $C(7;6;3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y-tengelyre esik? Ha igen, melyik?

5. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret. (A generált altér meghatározása alatt azt értjük, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amellyel egy tetszőleges $\mathbb{R}^4$-beli vektorról egyszerűen megmondható, hogy a generált altérhez tartozik-e.)

6*. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra teljesül, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan független, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w}$ rendszer viszont lineárisan összefüggő és $\underline{w} \neq \underline{0}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq 10$ és olyan $\alpha \neq 0$ skalár, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \alpha \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan összefüggő.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2017. december 11.

1. Legyen V azon altere $\mathbb{R}^4$-nek, melyet azok a vektorok alkotnak, melyek x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátáira teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. Adjunk meg V-ben egy olyan bázist, mely tartalmazza a jobbra látható $\underline{v}$ vektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét minden p valós szám esetén.

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+12)\cdot x_3 + (p+5)\cdot x_4 &= 10 \end{aligned}$$

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & x & 3x \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

6*. Egy 10 egyenletből álló, 10 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a kibővített együtthatómátrixával van megadva. Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

a) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?

b) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2017. december 18.

1. Hány olyan x egész szám létezik 1 és 2017 között, amelyre teljesül, hogy $92x-1$ x-szel azonos maradékot ad 399-cel osztva?

2. Legyen p egy 3-tól különböző, pozitív prímszám, a pedig egy olyan egész szám, amely sem 3-mal, sem p-vel nem osztható. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$a^{6p-6} \equiv 1 \pmod{9p}.$$

3. Legyen $n = 123456$. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg $12n+6$ és $9n+4$ legnagyobb közös osztóját.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?

b) Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az $\underline{a}$, $3\underline{a}+\underline{b}$, $6\underline{a}+2\underline{b}+\underline{c}$ vektorok?

5. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6*. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{9} = z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4} = \frac{y+8}{6}$, $z = 7$ egyenletrendszerű f egyenesek *normáltranszverzálisának* az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e-t és f-et is merőlegesen metszi.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2017. december 18.

1. Az $\mathbb{R}^4$ egy V alteréről annyit tudunk, hogy tartalmazza a jobbra látható vektorok mindegyikét. Meg lehet-e határozni ez alapján V dimenzióját? (Válaszunkat természetesen indokoljuk is.)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét minden p valós szám esetén.

$$\begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} px_1 + 2px_2 + px_3 &= 3p \\ 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + (p+15)x_3 &= 4 \end{aligned}$$

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Létezik-e olyan B mátrix, melyre BA a 3×3-as egységmátrix?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & x \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 6 & x \end{pmatrix}$$

6*. Nevezzünk egy 4×4-es mátrixot szépen kiegészíthetőnek, ha ki tudjuk egészíteni (egy-egy plusz sorral és oszloppal) 5×5-ös invertálható mátrixszá. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.

a) Ha egy 4×4-es mátrix szépen kiegészíthető, akkor a rangja legalább 3.

b) Ha egy 4×4-es mátrix rangja legalább 3, akkor a mátrix szépen kiegészíthető.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2017. október 19.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Mennyi maradékot ad 176-tal osztva 799^{801}?

* * * * *

176 prímtényezős felbontása: $176 = 2^4 \cdot 11$. (1 pont)
Ezért a tanult képlet szerint $\varphi(176) = (2^4 - 2^3)(11 - 1) = 80$. (2 pont)
Mivel $(799, 176) = 1$ (hiszen 799 sem 2-vel, sem 11-gyel nem osztható), (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tételből $799^{80} \equiv 1 \pmod{176}$ következik. (2 pont)
Mindkét oldalt a 10-edik hatványra emelve: $799^{800} \equiv 1^{10} = 1 \pmod{176}$. (2 pont)
Mindkét oldalt 799-cel szorozva: $799^{801} \equiv 799 \equiv 95 \pmod{176}$. (2 pont)
Így 799^{801} 95 maradékot ad 176-tal osztva.
Ha valaki az utolsó lépésben 799-nek a 176-os maradékát már nem számítja ki (és ezért 799-et ad végeredménynek), az ezért 1 pontot veszítsen. A feladat elvileg megoldható az ismételt négyzetre emelések módszerével is, de az (számológép nélkül) sokkal kellemetlenebb és hosszabb megoldásra vezet; ha egy hallgató ilyen megoldással próbálkozik (és az ahhoz szükséges számításokat legalább elkezdi), akkor legföljebb 2 pontot kaphat annak felismeréséért, hogy ez az algoritmus elvileg alkalmas a kérdés megválaszolására. További 8 pontot kaphat a helyes számításokért: a 799^{2^k} hatványok 176-os maradékai a $k = 0, \ldots, 9$ értékekre (ezek sorra : 95, 49, 113, 97, 81, 49, 113, 97, 81, 49) darabonként fél-fél pontot érjenek, a 801 felírása 2-es számrendszerben ($801 = 2^0 + 2^5 + 2^8 + 2^9$) 1 pontot, majd a 799^1, 799^{33}, 799^{289}, 799^{801} hatványok maradékai (ezek sorra: 95, 79, 63, 95) ismét darabonként fél-fél pontot érjenek.

2. Egy n egész szám 115-szöröse 110-zel nagyobb maradékot ad 344-gyel osztva, mint maga az n szám. Milyen maradékot adhat n 344-gyel osztva?

* * * * *

Első megoldás. A feladat szövege szerint $115n \equiv n + 110 \pmod{344}$. Mindkét oldalból n-et levonva a $114n \equiv 110 \pmod{344}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Mindkét oldalt 2-vel osztva: $57n \equiv 55 \pmod{172}$, ahol a modulust $(2, 344) = 2$ miatt kellett 2-vel elosztani. (1 pont)
Mindkét oldalt 3-mal szorozva: $171n \equiv 165 \pmod{172}$, vagyis $-n \equiv -7 \pmod{172}$. (2 pont)
Mindkét oldalt (-1)-vel szorozva: $n \equiv 7 \pmod{172}$. (1 pont)
Minden megtett lépés ekvivalens lépés volt – beleértve a 3-mal való szorzást is, $(3, 172) = 1$ miatt. Ezért az $n \equiv 7 \pmod{172}$ feltételt kielégítő n-ek valóban megoldásai a lineáris kongruenciának. (3 pont)
Ebből $n \equiv 7 \pmod{344}$ vagy $n \equiv 7 + 172 = 179 \pmod{344}$, vagyis az n egész 7 vagy 179 maradékot adhat 344-gyel osztva. (2 pont)
A lépések ekvivalenciája helyett hivatkozhatunk arra is, hogy $(114, 344) = 2$ miatt két megoldás kell legyen modulo 344, vagy akár ellenőrizhetjük is a kapott eredményeket. (Viszont a három érv közül valamelyikre szükség van annak annak kizárásához, hogy a kapott eredmények között hamis gyök lehessen.) Ha egy megoldó csak azt ellenőrzi, hogy $(114, 344) = 2 \big| 110$, így a lineáris kongruenciának két megoldása van modulo 344, de ezeket kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb. Ha valaki a szöveget félreértelmezi és a $115n + 110 \equiv n \pmod{344}$ feladatot oldja meg, az ezért 1 pontot veszítsen.

Második megoldás. A feladat szövege szerint $115n \equiv n + 110 \pmod{344}$. Mindkét oldalból n-et levonva a $114n \equiv 110 \pmod{344}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
Ezt az előadáson tanult (euklideszi) algoritmussal oldjuk meg.
Ehhez először 114 és 344 legnagyobb közös osztóját kell meghatározni; mivel $(114, 344) = 2 \big| 110$, ezért lesz megoldás (mégpedig 2 darab modulo 344) és az algoritmust 2-vel való osztással kell kezdenünk hogy az n együtthatója és a modulus relatív prímek legyenek. (2 pont)
2-vel osztva: $57n \equiv 55 \pmod{172}$, ahol a modulust $(2, 344) = 2$ miatt kellett 2-vel elosztani. (2 pont)
Most a $172n \equiv 0 \pmod{172}$ kongruenciából ki kell vonnunk a $57n \equiv 55 \pmod{172}$ kongruencia 3-szorosát: $n \equiv -165 \equiv 7 \pmod{172}$. Ezzel az algoritmus futása máris véget ért. (3 pont)
Ebből $n \equiv 7 \pmod{344}$ vagy $n \equiv 7 + 172 = 179 \pmod{344}$, vagyis az n egész 7 vagy 179 maradékot adhat 344-gyel osztva. (2 pont)
Ha egy megoldó $(114, 344)$ meghatározása és 2-vel osztás helyett rögtön a $114n \equiv 110 \pmod{344}$ lineáris kongruenciára kezdi futtatni az algoritmust és így (annak a 3-szorosát a $344n \equiv 0 \pmod{344}$ kongruenciából kivonva) egy lépésben a $2n \equiv 14 \pmod{344}$ kongruenciához jut, majd ebből 2-vel osztás után jut a végeredményhez, akkor a teljes értékű megoldáshoz indokolnia kell, hogy a kapott eredmények tényleg helyesek. (Ugyanis az a megoldó, aki így jár el, nem az előadáson tanult módszert követi, ezért nem is hagyatkozhat annak az előadáson bizonyított helyességére.) Ez az indoklás történhet az eredmények ellenőrzésével vagy arra hivatkozva, hogy $(114, 344) = 2$ miatt két megoldásnak kell lennie modulo 344, ezért a kapott eredmények között nem lehet hamis gyök. Ha egy megoldó ezt az indoklást elmulasztja, ezért 3 pontot veszítsen.

3. Tartalmazza-e az $R(1; 3; 4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1; 7; -1)$ és a $Q(11; 9; -5)$ pontokat összekötő egyenes a P-ben merőlegesen döf?

* * * * *

A keresett síkra merőleges a P-t és Q-t összekötő egyenes, ezért $\overrightarrow{PQ}$ normálvektora a síknak. (3 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (11; 9; -5) - (1; 7; -1) = (10; 2; -4)$, ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelöli. (2 pont)
$\overrightarrow{PQ}$ helyett használhatjuk annak a felét, az $\underline{n} = (5; 1; -2)$ vektort is normálvektornak.
A síkra illeszkedő P pont és $\underline{n}$ ismeretében már felírható a sík egyenlete:
$5x + y - 2z = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + (-2) \cdot (-1) = 14.$ (3 pont)
Behelyettesítve az R pont koordinátáit az egyenlet nem teljesül, így a sík nem tartalmazza R-et. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy az ($\mathbb{R}^n$-beli) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok lineárisan összefüggők, de közülük bármely 9-et kiválasztva lineárisan független vektorrendszert kapunk. Mutassuk meg, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok bármely $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjában vagy mindegyik együttható 0 vagy egyik együttható sem 0. (Azaz: mutassuk meg, hogy $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{10} \cdot \underline{v}_{10} = \underline{0}$ esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{10} = 0$ vagy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{10} \neq 0$ teljesül.)

* * * * *

Tegyük fel indirekt, hogy a feladat állítása hamis: léteznek a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}$ együtthatók úgy, hogy ezek nem mindegyike 0, de van köztük 0 és $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{10} \cdot \underline{v}_{10} = \underline{0}$. (2 pont)
Mivel a $\underline{v}_i$-k (és ezekkel együtt a λ_i-k) számozása érdektelen, feltehetjük, hogy például $\lambda_{10} = 0$. Ekkor a $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_9 \cdot \underline{v}_9 = \underline{0}$ összefüggést kapjuk, ahol a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_9$ együtthatók nem mindegyike 0 (hiszen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}$ között volt 0-tól különböző). (2 pont)
Ebből a tanultak szerint következik, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_9$ vektorok lineárisan összefüggők. (4 pont)
Ez pedig ellentmond a feladat állításának (miszerint $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ közül bármelyik 9 lineárisan független), amivel tehát az állítást beláttuk. (2 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorok generált alterét. Amennyiben ez az altér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamosak (mert nem skalárszorosai egymásnak), (1 pont)
ezért az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ generált altér (vagyis az $\underline{a}$-ból és $\underline{b}$-ből lineáris kombinációval kifejezhető vektorok halmaza) az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ (origóba tolt, vagyis helyvektor példányai) által kifeszített, origón átmenő S sík vektoraiból áll. (1 pont)
S-nek normálvektora bármilyen $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ami $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re is merőleges. (1 pont)
Az $\underline{n} = (a, b, c)$ vektor pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \underline{a}$ és az $\underline{n} \cdot \underline{b}$ skaláris szorzatok értéke 0. (1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $4a + 3b = 0$ és $5a + 2b + c = 0$. (1 pont)
Például a $b = -4$ választással $a = 3$ és $c = -7$ adódik, vagyis $\underline{n} = (3; -4; -7)$ jó normálvektor.(1 pont)
Ebből tehát S egyenlete: $3x - 4y - 7z = 0$. (1 pont)
A $\underline{c}$ koordinátái kielégítik ezt az egyenletet, így $\underline{c}$ (origóba tolt példánya) is S-ben fekszik (hiszen a $C(13; 1; 5)$ pont S-en van és $\underline{c}$ az origóból C-be mutat). (1 pont)
Ezért az $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ generált altér is csak az S vektoraiból áll (hiszen S-beli vektorok lineáris kombinációja is S-beli kell legyen). (2 pont)

Így tehát $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x - 4y - 7z = 0 \right\}$.

A fenti megoldásban az utolsó 3 pontnak megfelelő rész helyett az alábbi is jó:
Mivel $\underline{c} = -3\underline{a} + 5\underline{b}$, (1 pont)
ezért minden $\underline{a}$-ból, $\underline{b}$-ből és $\underline{c}$-ből lineáris kombinációval kifejezhető vektor már $\underline{a}$-ból és $\underline{b}$-ből is kifejezhető; vagyis $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$. (2 pont)

Második megoldás. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vektor pontosan akkor van az $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ generált altérben, ha $\underline{v}$ kifejezhető $\underline{a}$-ból, $\underline{b}$-ből és $\underline{c}$-ből lineáris kombinációval; vagyis ha léteznek olyan α, β, γ együtthatók, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{v}$. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ konkrét értékét és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} 4\alpha + 5\beta + 13\gamma &= x \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma &= y \\ \beta + 5\gamma &= z \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Az utolsó egyenletből $\beta = z - 5\gamma$. Ezt az első két egyenletbe helyettesítve: $4\alpha - 12\gamma = x - 5z$, $3\alpha - 9\gamma = y - 2z$. Vagyis átrendezés után: $\alpha - 3\gamma = \frac{x-5z}{4}$, illetve $\alpha - 3\gamma = \frac{y-2z}{3}$. (1 pont)
Ebből már látszik, hogy az egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha $\frac{x-5z}{4} = \frac{y-2z}{3}$. Valóban: ez a feltétel egyrészt nyilván szükséges a megoldhatósághoz (az utóbbi két egyenlet miatt). (1 pont)
Másrészt elégséges is: ha $\frac{x-5z}{4}$ és $\frac{y-2z}{3}$ közös értékét t jelöli, akkor például $\alpha = t$, $\beta = z$, $\gamma = 0$ nyilván megoldása az egyenletrendszernek. (2 pont)

A kapott feltételt átrendezve: $3x - 4y - 7z = 0$. Így $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x - 4y - 7z = 0 \right\}$. (1 pont)

Ez pedig a tanultak szerint egy sík egyenlete (mégpedig az origón átmenő, $\underline{n} = (3; -4; -7)$ normálvektorú síké). (2 pont)
A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges megadni a sík normálvektorát, sem azt, hogy az origón megy át. Ha valaki az első megoldás után írtak szerint először belátja, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ és ezután a fentihez hasonló módon az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ generált alteret hatátozza meg, akkor $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ megmutatásáért 2 pontot kapjon, viszont az (ebben az esetben csak két változós) lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele a fentiek szerinti $4(= 1 + 1 + 2)$ pont helyett csak 2 pontot érjen.

6*. Létezik-e páros Carmichael-szám?

* * * * *

Legyen $n > 2$ tetszőleges páros egész. Megmutatjuk, hogy n nem Carmichael-szám – vagyis a kérdésre a válasz nemleges. (Az $n = 2$ esettel nem kell foglalkoznunk, mert a Carmichael-számok definíció szerint nem lehetnek prímek.)
Ehhez a Carmichael-szám definíciója szerint be kell látnunk, hogy létezik olyan a egész, amelyre az $1 \le a \le n-1$, $(a, n) = 1$ és $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod n$ feltételek teljesülnek (vagyis a árulója n-nek).(4 pont)
Állítjuk, hogy az $a = n - 1$ választás megfelel ezeknek a feltételeknek.
Valóban, egyrészt $(a, n) = (n-1, n) = 1$, mert ha egy d egészre $d | n$ és $d | n-1$, akkor $d | n - (n-1) = 1$ is fennáll, így n és $n-1$ közös osztói csak a ± 1. (2 pont)
Másrészt $a = n - 1 \equiv -1 \pmod n$ miatt $a^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} = -1 \not\equiv 1 \pmod n$, ahol $(-1)^{n-1} = -1$ azért igaz, mert $n-1$ páratlan (4 pont)
(és $-1 \not\equiv 1 \pmod n$ pedig azért, mert $n > 2$).
Így $a = n - 1$ valóban árulója n-nek, amivel az állítást beláttuk.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2017. november 30.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

* * * * *

Belátjuk, hogy az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorrendszer a szóban forgó altér (nevezzük V-nek) bázisa, amiből következik, hogy V dimenziója 3, hiszen van 3 elemű bázisa. (2 pont)
Először belátjuk, hogy az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorok függetlenek. Írjuk fel a $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}) + \beta(\underline{c}+\underline{d}) + \gamma(\underline{a}+\underline{c}) = \underline{0}$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\gamma)\underline{a} + \alpha\underline{b} + (\beta+\gamma)\underline{c} + \beta\underline{d} = \underline{0}$$

adódik. (1 pont)
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben), ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta+\gamma = 0, \beta = 0$. (2 pont)
Ebből persze $\gamma = 0$ is adódik, így a kérdéses vektorok egy lineáris kombinációja csak akkor lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (1 pont)
Most belátjuk, hogy $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ generálja V-t. Ehhez elég belátni, hogy $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ egy alkalmas lineáris kombinációja előállítja a $\underline{b}+\underline{d}$ vektort, hiszen ekkor minden olyan vektor is előáll a lineáris kombinációjukként, ami V-ben van. (2 pont)
Mivel $\underline{b}+\underline{d} = (\underline{a}+\underline{b}) + (\underline{c}+\underline{d}) - (\underline{a}+\underline{c})$, a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 9x_2 + 16x_3 &= 17 \\ x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 &= 5 \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1-p)$-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$. (1 pont)
Ha $p = 1$, akkor a harmadik sor csupa 0 sor, így töröljük, (1 pont)
majd az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_3 = a \in \mathbb{R}, x_1 = 4 + a, x_2 = 1 - 2a$. (3 pont)

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elírásokért (ha nem lett könnyebb tőlük a feladat) nem muszáj pontot levonni.

3. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között egyetlen nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)
Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak a 6-ot választhatjuk, így az ötödik sorból a 2-t már nem, csak az 1-et választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet). Hasonlóan folytatva, az első sorból csak az 1-et, ezért a másodikból csak a 3-at, végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk, így csakugyan egyetlen nemnulla szorzatot kapunk, a $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$-at. (3 pont)
Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció a 4,1,3,2,5 (hiszen az első sorból a negyedik elemet vettük, a másodikból az elsőt, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (hiszen 4 inverzióban álló pár van: $(4,1)$, $(4,3)$, $(4,2)$, $(3,2)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: $+$, (1 pont)
a determináns értéke tehát 54. (1 pont)

4. a) Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.
b) $p = 3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) Gauss-eliminációval, kifejtési tétellel vagy akár a definíció alapján gyorsan kideríthető, hogy a mátrix determinánsa $-2p$, erre 2 pontot adjunk, ha minden helyes. Ismert, hogy inverz akkor és csak akkor létezik, ha a determináns nem 0, így az a) feladatra a válasz az, hogy pontosan $p \neq 0$ esetén létezik az inverz, erre 1 pontot adjunk.
b) Gauss-eliminációval a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 13 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixot az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

lépcsős alakra hozzuk, (3 pont)
majd az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, (3 pont)

ahonnan az inverz $\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, (1 pont)

a keresett bal felső elem pedig $\frac{11}{2}$. (0 pont)

Az a) feladatnál elő fog fordulni, hogy valaki az inverz keresése közben, a $p = 0$ esetben csupa 0 sort talál a mátrix eliminálásakor, az előadáson tanultak szerint ekkor kijelentheti, hogy nincs inverz. Ha valaki az inverz megadásával fejezi be a feladatot és nem adja meg a bal felső elemet (de az persze a megadott inverzből leolvasható), akkor a pontozásnak megfelelően nem kell pontot levonni. Természetesen a feladat megoldásához nem kell a teljes inverzet kiszámítani, elég annak az első oszlopát megállapítani, vagyis a leírt Gauss-eliminációk utolsó két oszlopára nincs szükség. Ha valaki így jár el, akkor ezen eljárás helyességét nem kell külön indokolnia, hiszen ez szerepelt az előadáson. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le (akkor is, ha az érdektelen részben vannak, kivéve ha a hallgató ezen rész lényegtelen voltára kitér), elírásokért, ha attól a feladat nem lett könnyebb, nem muszáj levonni.

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x, y \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & y & y \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A rang azonos a lineárisan független sorok maximális számával. (1 pont)
Az első két sor független, hiszen az utolsó két koordináta mutatja, hogy egyik sem számszorosa a másiknak. (2 pont)

A rang megállapításához az újonnan érkező vektor lemmája miatt most már elég azt vizsgálni, hogy a harmadik sor előáll-e az első kettő lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Ha $x = 0$, akkor a harmadik sor nem lehet az első kettő lineáris kombinációja, az első koordináták miatt. (1 pont)
Ha $x \neq 0$, akkor az első koordináták vizsgálatából az derül ki, hogy alkalmas lineáris kombinációhoz az első sort $\frac{1}{x}$-szer kell venni, (1 pont)
ahonnan a harmadik koordinátákat vizsgálva $y = \frac{1}{x}$ kell legyen. (1 pont)
Ekkor a harmadik sor épp az első $\frac{1}{x}$-szerese, vagyis ilyenkor a sorok nem függetlenek. (1 pont)
Ezek alapján: $x = 0$ esetén a rang 3, $x \neq 0, y \neq \frac{1}{x}$ esetén a rang szintén 3, végül $x \neq 0, y = \frac{1}{x}$ esetén (vagyis amikor $xy = 1$) a rang 2. (1 pont)
Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Második megoldás. A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek száma. (1 pont)
Ha $x = 0$, akkor az első és a harmadik sor cseréje után (1 pont)
elő is állt a lépcsős alak 3 vezéregyessel. (1 pont)
Ha $x \neq 0$, akkor osztunk x-szel, majd az első sort levonjuk a harmadikból. (2+1 pont)
Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y - \frac{1}{x} & y - \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

alakú, vagyis megvan a második vezéregyes is, (1 pont)
a harmadikat pedig pontosan akkor tudjuk létrehozni, ha $y \neq \frac{1}{x}$. (2 pont)
Vagyis $x \neq 0$ esetén a rang 3, ha $y \neq \frac{1}{x}$ és 2, ha $y = \frac{1}{x}$. (1 pont)
Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Harmadik megoldás. Ismét Gauss-eliminációt használunk, de előtte felcseréljük az első és a harmadik sort, ez a rangot (a sorrang definíciója miatt, amiben a sorok sorrendje lényegtelen) nem változtatja meg. (Ha valaki a Gauss-elimináció keretében cseréli ki ezt a két sort, akkor elvileg indokolnia kéne, hogy a rang miért nem változik – hiszen nem pontosan a tanult algoritmust követi –, de ennek hiányáért nem muszáj pontot levonni.) (2 pont)
A lépcsős alakban keressük a vezéregyesek számát, (1 pont)
ehhez az első sor x-szeresét levonjuk a harmadik sorból. (2 pont)
Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & y & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - xy & 1 - xy \end{pmatrix}$$

alakú, vagyis megvan a második vezéregyes is, (1 pont)
a harmadikat pedig pontosan akkor tudjuk létrehozni, ha $xy \neq 1$. (2 pont)
Mindezek alapján ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (2 pont)

6*. Egy 5×5-ös A mátrixnak pontosan hat olyan 3×3-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.

* * * * *

Első megoldás. A akkor és csak akkor invertálható, ha az oszlopai függetlenek (hiszen mindkét állítás azzal ekvivalens, hogy A determinánsa nem 0). (1 pont)
Ekkor akárhogy választunk az oszlopok közül hármat, azok is függetlenek lesznek, (2 pont)

vagyis az általuk meghatározott 5×3-as részmátrixok rangja 3. (1 pont)
Ezekben a mátrixokban tehát – a rangfogalmak egyenlősége miatt – létezik nem 0 determinánsú 3×3-as részmátrix. (2 pont)
Ezek a 3×3-as részmátrixok különbözők lesznek, ha különböző 3×5-ös részmátrixokból választjuk őket. (2 pont)
Mivel 3×5-ös részmátrixot 10-féleképp tudunk kiválasztani (két oszlopot kell elhagyni, az elsőt 5-, a másodikat 4-féleképp választhatjuk, de így minden párt kétszer számoltunk), ha A invertálható lenne, akkor lenne legalább 10 nem 0 determinánsú (vagyis invertálható) 3×3-as részmátrixa, amivel a bizonyítást befejeztük. (2 pont)

Második megoldás. A kifejtési tétel segítségével megmutatjuk, hogy A determinánsa 0, amiből az állítás következik. (1 pont)
Tegyük fel, hogy a determináns nem 0 és fejtsük azt ki az utolsó sor szerint. A kapott előjeles aldeterminánsok közt nyilván kell legyen 0-tól különböző, tartozzon ez a B 4×4-es részmátrixhoz. (1 pont)
B determinánsát az 1., a 2., a 3. és a 4. sora szerint kifejtve is kell hogy kapjunk olyan 3×3-as előjeles aldeterminánsokat, amik nem 0-k. (2 pont)
Ezek mind különböző invertálható részmátrixokhoz tartoznak, melyek egy kivétellel mind tartalmaznak elemeket az 1. sorból. (1+1 pont)
Fejtsük most ki A determinánsát az első sor szerint. (1 pont)
A fentiekhez hasonlóan kell kapnunk egy C 4×4-es részmátrixot, melynek determinánsa nem 0, és itt is kapunk 4 különböző invertálható 3×3-as részmátrixot. (1 pont)
Ezek közül azonban egyik sem tartalmaz elemeket az 1. sorból, (1 pont)
így már 7 különböző nem 0 determinánsú 3×3-as részmátrixot találtunk, ami ellentmondás. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok az ELSŐ zárthelyi pótlására — pontozási útmutató
2017. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Adjuk meg az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy 51-gyel osztva 3 maradékot ad, továbbá a szám 17-szeresének utolsó két számjegye 15.

* * * * *

A keresett számot n-nel jelölve a feladat feltételei: $n \equiv 3 \pmod{51}$ és $17n \equiv 15 \pmod{100}$. (1 pont)
Az utóbbi feltétel egy lineáris kongruencia, ezt a tanult módszerekkel oldjuk meg.
Mindkét oldalt 6-tal szorozva: $102n \equiv 90 \pmod{100}$, vagyis $2n \equiv 90 \pmod{100}$. (1 pont)
Mindkét oldalt 2-vel osztva: $n \equiv 45 \pmod{50}$, ahol a modulust $(2, 100) = 2$ miatt osztottuk 2-vel.(1 pont)
Ebből $n \equiv 45 \pmod{100}$ vagy $n \equiv 95 \pmod{100}$. Ellenőrzéssel azt kapjuk, hogy a két megoldás közül az első hamis gyök (ami a 6-tal szorzás miatt jött be, hiszen $(6, 100) \neq 1$), a második viszont helyes.(1 pont)
Azokat az n-eket keressük tehát, amik kielégítik az $n \equiv 95 \pmod{100}$ és az $n \equiv 3 \pmod{51}$ feltételeket. Ez egy kongruenciarendszer, amit a tanult módszerrel oldunk meg. (1 pont)
Az első feltételből: $n = 100k + 95$ valamely k egészre. Ezt a másodikba helyettesítve: $100k + 95 \equiv 3 \pmod{51}$. Mindkét oldalból 95-öt levonva a $100k \equiv -92 \pmod{51}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
$100 \equiv -2 \pmod{51}$ miatt ez a $-2k \equiv -92 \pmod{51}$ alakba írható. (1 pont)
(-2)-vel osztva: $k \equiv 46 \pmod{51}$, ahol a modulus $(-2, 51) = 1$ miatt nem változott. Mivel mindkét megtett lépésünk ekvivalens átalakítás volt, ezzel valóban a lineáris kongruencia megoldását kaptuk. (1 pont)
Ebből tehát $k = 51\ell + 46$ valamely ℓ egészre. Ezt visszahelyettesítve: $n = 100k + 95 = 100(51\ell + 46) + 95 = 5100\ell + 4695$. (1 pont)
Így a feladat feltételeit az $n \equiv 4695 \pmod{5100}$ feltételt kielégítő n egészek teljesítik. Ezek közül a 4695 és a 9795 négyjegyű pozitív egészek, így a feladatnak ez a két megoldása van. (1 pont)
A feladat rövidebben is megoldható, ha az $n \equiv 3 \pmod{51}$ feltételből kapott $n = 51k + 3$ alakot helyettesítjük az n helyére a $17n \equiv 15 \pmod{100}$ kongruenciában. A megoldás során előkerülő lineáris kongruenciák az Euklideszi algoritmussal is megoldhatók. (Ez mindegyik esetben közvetlenül alkalmazható, mert az ismeretlen együtthatója a modulushoz relatív prím.) Aki a fent leírthoz hasonló utat választ, annak az első esetben a két ellenőrzés közül az egyik, a második esetben a lépések ekvivalenciájára való hivatkozás kiváltható azzal, hogy a megoldások száma mindkét esetben előre tudhatóan 1 lesz, mert az ismeretlen együtthatója a modulushoz relatív prím.

2. Milyen maradékot ad 108-cal osztva $73^{37} + 37^{73}$?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

108 prímtényezős felbontása: $108 = 2^2 \cdot 3^3$. (1 pont)
Ezért a tanult képlet szerint $\varphi(108) = (2^2 - 2^1)(3^3 - 3^2) = 36$. (1 pont)
Mivel $(73, 108) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tételből $73^{36} \equiv 1 \pmod{108}$ következik. (1 pont)
Mindkét oldalt 73-mal szorozva: $73^{37} \equiv 73 \pmod{108}$. (1 pont)
Mivel $(37, 108) = 1$ is igaz, (1 pont)
ezért ismét az Euler-Fermat tételből $37^{36} \equiv 1 \pmod{108}$ következik. (1 pont)
Mindkét oldalt négyzetre emelve: $37^{72} \equiv 1^2 = 1 \pmod{108}$. (1 pont)
Mindkét oldalt 37-tel szorozva: $37^{73} \equiv 37 \pmod{108}$. (1 pont)
A kapott $73^{37} \equiv 73 \pmod{108}$ és $37^{73} \equiv 37 \pmod{108}$ kongruenciákat a tanult szabály szerint összeadva: $73^{37} + 37^{73} \equiv 73 + 37 = 110 \equiv 2 \pmod{108}$, (1 pont)
vagyis a keresett maradék a 2.
A feladat elvileg megoldható az ismételt négyzetre emelések módszerével is, de az (számológép nélkül) sokkal kellemetlenebb és hosszabb megoldásra vezet; ha egy hallgató ilyen megoldással próbálkozik (és az ahhoz szükséges számításokat legalább elkezdi), akkor legföljebb 2 pontot kaphat pusztán annak felismeréséért, hogy ez az algoritmus elvileg alkalmas a két hatvány 108-as maradékának meghatározására.

3. Az előadáson tanult megfelelő algoritmus alkalmazásával határozzuk meg 5^{85}-nek a 155-tel vett osztási maradékát.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tanultak szerint ismételt négyzetre emelésekkel és a kapott eredmények 155-ös maradékának meghatározásával kiszámítjuk az $5^1, 5^2, 5^4, \ldots, 5^{64}$ hatványok 155-ös maradékát. Ezek sorra: 5, 25, 5 (mert $625 \equiv 5 \pmod{155}$), 25, 5, 25 és 5. (4 pont)
Mivel $85 = 1 + 4 + 16 + 64$, (2 pont)
ezért sorra meghatározzuk az $5^5 = 5^1 \cdot 5^4$, $5^{21} = 5^5 \cdot 5^{16}$, végül az $5^{85} = 5^{21} \cdot 5^{64}$ hatványok 155-ös maradékait a korábban kiszámolt megfelelő maradékokkal való szorzással és a kapott eredmények 155-ös maradékának meghatározásával. Ezek sorra: 25, 125 és 5. (4 pont)
Így a keresett maradék: 5.
A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges a fenti részletességgel leírni az elvégzett műveletek mögötti szándékot, elegendő a helyes számítások közlése. Nem jelent pontlevonást, ha egy megoldó a végeredményhez először $5^{80} = 5^{64} \cdot 5^{16}$, majd sorban 5^{84} és végül 5^{85} maradékait határozza meg a fentihez hasonló módon. Ha viszont egy megoldó a kapott részeredményeit nem helyettesíti azok 155-ös maradékaival és például 5^8 maradékához a 625 négyzetre emelésével próbál eljutni, az lényeges elvi hibának számít, ami az algoritmus ismeretének alapvető hiányát mutatja; egy ilyen megoldó legföljebb 5 pontot kaphat (azt is csak akkor, ha a további számolásai hasznosak és a helyes végeredményt megkapja).

4. Van-e az $A(-1; -2; 1)$, $B(3; 1; 3)$ és $C(7; 6; 3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y-tengelyre esik? Ha igen, melyik?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (3; 1; 3) - (-1, -2; 1) = (4; 3; 2)$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} = (7; 6; 3) - (-1, -2; 1) = (8; 8; 2)$, ahol $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorokat jelöli. (1 pont)
Az A, B és C pontokat tartalmazó S síknak normálvektora lesz az $\underline{n} \neq \underline{0}$ vektor, ha az merőleges $\overrightarrow{AB}$-re és $\overrightarrow{AC}$-re is. (1 pont)
Így az $\underline{n} = (p, q, r) \neq \underline{0}$ pontosan akkor ilyen, ha az $\underline{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ és az $\underline{n} \cdot \overrightarrow{AC}$ skaláris szorzatok értéke 0.(1 pont)
A skaláris szorzat képletéből: $4p + 3q + 2r = 0$ és $8p + 8q + 2r = 0$. (1 pont)
A második egyenlet feléből az elsőt kivonva: $q - r = 0$, vagyis $q = r$. Ezt bármelyik egyenletbe helyettesítve a $4p + 5r = 0$ egyenletet kapjuk. Így például $r = -4$ választással $p = 5$ és $q = -4$ adódik, vagyis $\underline{n} = (5; -4; -4)$ normálvektora S-nek. (2 pont)
Ebből A, B és C közül bármelyiket használva felírható S egyenlete: $5x - 4y - 4z = -1$. (1 pont)

A $P(x, y, z)$ pont akkor és csak akkor van az y tengelyen, ha $x = z = 0$. (1 pont)
Ezt S egyenletébe helyettesítve: $-4y = -1$, vagyis $y = \frac{1}{4}$. Így az S-en az y-tengelynek egyetlen pontja van: a $(0; \frac{1}{4}; 0)$. (2 pont)
A fenti megoldásban a normálvektor kiszámítására vonatkozó rész helyettesíthető az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzat meghatározásával is. (Ebből közvetlenül a $(-10; 8; 8)$ vektor adódik, ami a fent kiszámítottnak a (-2)-szerese, így természetesen szintén normálvektora S-nek.)

5. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret. (A generált altér meghatározása alatt azt értjük, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amellyel egy tetszőleges $\mathbb{R}^4$-beli vektorról egyszerűen megmondható, hogy a generált altérhez tartozik-e.)

* * * * *

Az $\underline{x} = (p, q, r, s)^T$ vektor definíció szerint pontosan akkor tartozik az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérbe, ha léteznek olyan α, β, γ skalárok, amelyekre $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = \underline{x}$. (2 pont)
Elvégezve a műveleteket: $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = (\gamma, \beta + 2\gamma, \alpha + 2\beta + 4\gamma, 2\alpha + 5\beta + 11\gamma)^T$. (2 pont)
Így $\underline{x}$ pontosan akkor van a generált altérben, ha léteznek olyan α, β, γ skalárok, amelyekre $\gamma = p$, $\beta + 2\gamma = q$, $\alpha + 2\beta + 4\gamma = r$ és $2\alpha + 5\beta + 11\gamma = s$. (3 pont)
Ezekből az egyenletekből sorban: $\gamma = p$, $\beta = q - 2\gamma = q - 2p$, $\alpha = r - 2\beta - 4\gamma = r - 2(q - 2p) - 4p = r - 2q$.
Ezt a negyedik egyenletbe helyettesítve: $2(r - 2q) + 5(q - 2p) + 11p = s$, vagyis $p + q + 2r - s = 0$.(2 pont)
Azt kaptuk tehát, hogy $\underline{x} = (p, q, r, s)^T \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ pontosan akkor igaz, ha $p + q + 2r - s = 0$. (1 pont)

6*. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra teljesül, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan független, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w}$ rendszer viszont lineárisan összefüggő és $\underline{w} \neq \underline{0}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq 10$ és olyan $\alpha \neq 0$ skalár, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \alpha \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan összefüggő.

* * * * *

A feladat feltételeiből az újonnan érkező vektor lemmája szerint azonnal következik, hogy $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10} \rangle$, (1 pont)
vagyis léteznek a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}$ skalárok úgy, hogy $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{10}\underline{v}_{10} = \underline{w}$. (1 pont)
Mivel $\underline{w} \neq 0$, ezért a $\lambda_1, \ldots, \lambda_{10}$ együtthatók között van nullától különböző. Legyen például $\lambda_k \neq 0$.(2 pont)
Ekkor a fentiből átrendezéssel:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\underline{v}_{k-1} + \lambda_k \left(\underline{v}_k - \frac{1}{\lambda_k}\underline{w} \right) + \lambda_{k+1}\underline{v}_{k+1} + \ldots + \lambda_{10}\underline{v}_{10} = \underline{0}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Mivel $\lambda_k \neq 0$, ez a tanultak szerint azt jelenti, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1}, \underline{v}_k - \frac{1}{\lambda_k}\underline{w}, \underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan összefüggő. Vagyis a feladat állítása az $i = k$ és $\alpha = -\frac{1}{\lambda_k}$ választással valóban teljesül. (3 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok, MÁSODIK pótzh — pontozási útmutató
2017. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Minden feladat 10 pontot ér. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér. A megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hibákért általában (vagyis ha nincs másképp jelezve) 1 pontot vonjunk le, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló elírásokért (vagyis amikor a hallgató nyilvánvalóan nem azt írta le, amit szeretett volna, pl. feladat adatainak másolásakor, saját részeredményének másolásakor) nem muszáj pontot levonni. Fontos, hogy győződjünk meg róla, hogy valóban számolási hibáról, illetve elírásról van szó, mivel az elvi hibákért ennél sokkal több pontot kell levonni. Ha egy számolási hiba vagy elírás a megoldás menetét érdemben befolyásolja, akkor csak azokat a részpontokat kaphatja meg a hallgató, amik a feladat eredeti formájának megoldásához is hozzájárulnak.

1. Legyen V azon altere $\mathbb{R}^4$-nek, melyet azok a vektorok alkotnak, melyek x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátáira teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. Adjunk meg V-ben egy olyan bázist, mely tartalmazza a jobbra látható $\underline{v}$ vektort.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az előadáson tanult eljárást követjük: egy független rendszert bővítünk egyesével, amíg bázist nem kapunk. A kezdeti független rendszer az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorból áll, ehhez kell egy további vektort úgy, hogy együtt is függetlenek legyenek. (1 pont)

Erre alkalmas pl. a $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor, hiszen ez nem skalárszorosa $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$-nak (ez pedig a tanult eljárás vagy az újonnan érkező vektor lemmája szerint elegendő). (2 pont)

A kapott független rendszert a következő lépésben bővíthetjük pl. az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorral, hiszen az nem

állhat elő az első két vektor lineáris kombinációjaként (ez ismét a tanult eljárás vagy az újonnan érkező vektor lemmája szerint elegendő), mivel a negyedik koordinátája 1, míg a másik két vektor negyedik koordinátája 0. (2 pont)
Azt állítjuk, hogy a kapott rendszer a kérdéses altér bázisa lesz. Egy 3 dimenziós altérben 3 független vektor a tanultak szerint bázist alkot, ezért elég belátni, hogy a kérdéses altér valóban 3 dimenziós. (1 pont)
Az altér az F-G egyenlőtlenség miatt 3-nál kevesebb dimenziós nem lehet, mivel van benne 3 független vektor, (2 pont)
4 dimenziós pedig nem lehet, mivel ekkor maga $\mathbb{R}^4$ lenne (hiszen 4 darab $\mathbb{R}^4$-beli független vektor a tanultak szerint $\mathbb{R}^4$ bázisa lenne), ami nyilván nem áll fenn (hiszen $\mathbb{R}^4$ nem minden vektorára teljesül, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$). (2 pont)

Szigorúan véve azt is be kéne látni, hogy az altér nem 5 vagy több dimenziós, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot. A három vektor megadása után folytathatjuk a megoldást a következőképp is (a megoldás eddigi menete alapján azt már tudjuk, hogy a vektorok függetlenek).

Ahhoz, hogy a megadott vektorok bázist alkossanak, azt kell még belátnunk, hogy generálnak minden olyan vektort, ami az altérben van. (1 pont)
Legyen $\underline{x}$ ilyen vektor és legyenek a koordinátái x_1, x_2, x_3, x_4. Azt kell megmutatnunk, hogy léteznek a, b, c skalárok, melyekre

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(1 pont)

Vagyis az

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & x_1\\1 & 0 & 0 & x_2\\1 & 1 & 0 & x_3\\0 & 0 & 1 & x_4\end{array}\right)$$

egyenletrendszerről kell belátnunk, hogy létezik megoldása (az a, b, c változókra). (1 pont)
A második és a negyedik sor (egyenlet) alapján $a = x_2, c = x_4$, most a harmadik sor alapján $b = x_3 - a = x_3 - x_2$ és az így kapott a, b, c értékek nem csak a második, a negyedik és a harmadik egyenletet elégítik ki, hanem az elsőt is: $a + 3b + c = x_2 + 3(x_3 - x_2) + x_4 = -2x_2 + 3x_3 + x_4 = x_1$, hiszen tudjuk, hogy $x_4 = x_1 + 2x_2 - 3x_3$. (2 pont)

2. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét minden p valós szám esetén.

$$\begin{vmatrix}p & 1 & 3 & 7\\1 & p & 8 & 8\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 3 & p & p\end{vmatrix}$$

* * * * *

Jelöljük a keresett determináns értékét D-vel. A kifejtési tételt az első oszlopra alkalmazva: $D = p \cdot \begin{vmatrix}p & 8 & 8\\1 & 1 & 1\\3 & p & p\end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\1 & 1 & 1\\3 & p & p\end{vmatrix}$ (3 pont)
(Itt a 0-val szorzott tagokat már elhagytuk.) Az első, p-vel szorzott determináns két oszlopa azonos, így az értéke 0 (hiszen az egyikből a másik sort kivonva csupa 0 oszlopot kapnánk). (2 pont)
A második, (-1)-gyel szorzott determináns második sorának p-szeresét kivonjuk a harmadik sorából (ez az értékét nem változtatja meg), (2 pont)
majd ismét a kifejtési tételt alkalmazzuk, az utolsó sora szerint:

$$D = -1 \cdot \begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\1 & 1 & 1\\3-p & 0 & 0\end{vmatrix} = -1 \cdot (3-p) \cdot \begin{vmatrix}3 & 7\\1 & 1\end{vmatrix}$$ (2 pont)

Innen a 2×2-es determinánsok kiszámítására vonatkozó ismert szabállyal fejezhetjük be a megoldást: $D = -(3-p)(-4) = 12 - 4p$. (1 pont)

Természetesen a determináns értéke sok más úton is megkapható, a leggyorsabban úgy, hogy a 4. oszlopból a 3.-at levonjuk, majd a 4. oszlop szerint fejtjük ki a determinánst. Alkalmazható a Gauss-elimináció is, de paramétert tartalmazó kifejezéssel leosztva külön kell kezelni azt az esetet, amikor annak az értéke 0, illetve 0-tól különböző. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyenek például: a kifejtési tételben a sakktáblaszabályból származó előjel elhagyása, vagy helytelen megállapítása (kivéve, ha teljes biztonsággal meggyőződtünk róla, hogy elírásról (0 pont levonás), illetve számolási hibáról (1 pont levonás) van szó); paramétert tartalmazó kifejezéssel való osztás a szükséges esetvizsgálat nélkül; egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után a determináns értékváltozásának figyelmen kívül hagyása vagy hibás követése. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni.

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+12)\cdot x_3 + (p+5)\cdot x_4 &= 10 \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p & p+1 & 0 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq 0$, akkor a harmadik sort p-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{3(p+1)}{p} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{p+1}{p} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p+1}{p} & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_4 = a \in \mathbb{R}, x_1 = 2 + (1 + \frac{3(p+1)}{p})a, x_2 = 1 - (1 - \frac{p+1}{p})a, x_3 = -\frac{p+1}{p}a$. (2 pont)
Ha $p = 0$, akkor meg is kaptuk a lépcsős alakot (a 3. vezéregyes a 4. oszlopban van), ahonnan az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)
Innen a megoldás $x_3 = b \in \mathbb{R}, x_1 = 2 - 3b, x_2 = 1 - b, x_4 = 0$. (2 pont)

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elírásokért (ha nem lett könnyebb tőlük a feladat) nem muszáj pontot levonni.

4. Legyen A a jobbra látható mátrix. Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Jó eredmény, megfelelő indoklással (pl. A és B megfelelő sorrendű szorzata kiszámolva vagy A bármely 2×2-es részmátrixának inverze (pl. Gauss-eliminációval) kiszámolva (mind a három invertálható lesz) és B megfelelő pozícióiba beírva, a maradék két hely pedig 0-kkal feltöltve) 10 pont. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, ha azok a megoldást, illetve annak menetét érdemben nem befolyásolják. Ha valaki csak B-t és az AB szorzatot közli, bármiféle részeredmény nélkül, de az eredmény hibás, akkor 0 pontot kapjon. Ha valaki nincs tisztában azzal, hogy nem négyzetes mátrixnak nincs inverze, az a többi, ettől független próbálkozásaira legfeljebb 4 pontot kapjon, azt is csak akkor, ha ezek a próbálkozások az elvi hibás megközelítéstől valóban jól láthatóan függetlenek. Általában is igyekezzünk meggyőződni róla, hogy a számítások mögött valameilyen (helyes) koncepció húzódik meg, az irány nélküli próbálkozásokra kevés (legfeljebb 2) pontot adjunk. Aki úgy véli, hogy alkalmas B nem létezik, mert A nem négyzetes, az 0 pontot kapjon. Alább közlünk egy, a szükségesnél némileg bonyolultabb megoldást, ami vélhetően sokak megoldására fog hasonlítani.

Keressük B-t $B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ alakban. Ekkor a, b, c-re a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert, $d, e, f,$-re a $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 1 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldanunk. (2 pont)

Az első egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakra vezet, (2 pont)

ahonnan a megoldás $c \in \mathbb{R}, a = \frac{7}{2} - \frac{9}{2}c, b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}c.$ (1 pont)

A második egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakra vezet, (2 pont)

ahonnan a megoldás $f \in \mathbb{R}, d = -2 - \frac{9}{2}f, e = 1 + \frac{1}{2}f.$ (1 pont)

Egy helyes megoldás felírása (vagyis a mátrix vagy elemeinek megadása). (2 pont)

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & x & 3x \\ 1 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

* * * * *

A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek (vagyis a sorok) száma. (1 pont)

Gauss-eliminációval az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 0 & x-8 & 3x-6 \end{pmatrix}$$

alakot kapjuk. (2 pont)

Két vezéregyesünk már van, (1 pont)

a harmadikat pedig akkor tudjuk létrehozni a harmadik oszlopban, ha $x \neq 8$. (2 pont)

Vagyis $x \neq 8$ esetén a rang 3. (1 pont)

Ha $x = 8$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, de a negyedik oszlopban álló elem 18, így a sort 18-cal osztva megkapjuk a harmadik vezéregyest is, (2 pont)

vagyis a rang ekkor is 3. (1 pont)

6*. Egy 10 egyenletből álló, 10 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a kibővített együtthatómátrixával van megadva. Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

a) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?

b) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?

* * * * *

Az első állítás nem igaz, ehhez elég egy csupa 0-ból álló kibővített együtthatómátrixot szemügyre venni. Ennek bármely elemét megváltoztatva (sőt, akár bármely 9 elemét megváltoztatva) sem lehet elérni, hogy a megoldás egyértelmű legyen, mivel még mindig lesz csupa 0 sora, azaz a Gauss-elimináció során nem keletkezhet 10 vezéregyes. (3 pont)
A második állítás viszont igaz lesz. Tudjuk, hogy kezdetben az együtthatómátrix bal oldalának 10 sora és 10 oszlopa van. Futtassuk le a Gauss-eliminációt, ekkor – mivel van megoldás – megkapjuk a (redukált) lépcsős alakot. (1 pont)
A (redukált) lépcsős alaknak azonban nem lehet 10 sora, hiszen ekkor – a tanultak szerint – egyértelmű lenne a megoldás. (2 pont)
Kellett tehát az elimináció közben kapnunk legalább egy csupa 0 sort, amit töröltünk. (1 pont)
Ha ebben a sorban a jobb oldalon álló kezdeti értéket megváltoztatjuk, akkor az elimináció során nem csupa 0 sort, hanem tilos sort fogunk kapni, hiszen a bal oldalon továbbra is csupa 0, míg a jobb oldalon 0-tól különböző szám fog állni, így a második állítás csakugyan igaz. (3 pont)

Azt, hogy a csupa 0 sorban a jobb oldalon álló kezdeti értéket megváltoztatva csakugyan tilos sort fogunk kapni, precízen úgy lehet belátni, hogy a változást a csupa 0 sor jobb oldalán ejtjük meg, majd az elimináció lépéseit megfordítva haladunk visszafelé az inputig, ahol is a változás egyedül az említett elemet fogja érinteni. Ennek a gondolatnak a hiányáért persze nem kell pontot levonni.