Bevezetés a számításelméletbe I.

1. zárthelyi

2016. október 20.

1. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen döfi az $x + 2y + 3z = 6$ egyenletű síkot az $(1, 1, 1)$ pontban, az f egyenesről pedig hogy átmegy az $(5, 2, -1)$ ponton és a $(13, 4, -5)$ ponton. Döntsük el, hogy e-nek és f-nek van-e közös pontja.

2. Álljon az $\mathbb{R}^4$ V altere azon $\underline{x}$ vektorokból, melyekre $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$ teljesül (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i. koordinátáját jelöli). Adjunk meg egy bázist V-ben és mutassuk is meg róla, hogy bázis. (Azt, hogy V altér, nem kell igazolnunk.)

3. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + p \cdot x_3 + 9x_4 &= p \end{aligned}$$

5. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

6. Létezik-e olyan n egész szám, melyre az alábbi determináns értéke 0?

$$\begin{vmatrix} 1241 & 1526 & 1566 & n \\ 1914 & 1711 & 896 & 1944 \\ 1552 & 1848 & 1867 & 2004 \\ n+955 & 1896 & 1990 & 1849 \end{vmatrix}$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. zárthelyi

2016. november 24.

1. a) Legyen A tetszőleges 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy A mindig előállítható 6 darab 1 rangú mátrix összegeként.

b) Legyen B 5 rangú 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy B mindig előállítható 5 darab 1 rangú mátrix összegeként.

2. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1, 0)$ vektorhoz, az $(1, 1)$ vektorhoz és az $(1, 2)$ vektorhoz is az $(1, 2)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

3. Legyen $\underline{b}_1 = (2, 1)$, $\underline{b}_2 = (3, 1)$, $\underline{c}_1 = (1, 1)$, $\underline{c}_2 = (1, 0)$ és legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynek a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerinti mátrixa $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg f-nek a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis szerinti mátrixát.

4. Legyen A a jobbra látható mátrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Döntsük el, hogy A-nak sajátértéke-e a 2.

b) Döntsük el, hogy A-nak sajátvektora-e a $(2, 1, -1)$ vektor.

c) Adjuk meg A-nak egy olyan sajátvektorát, melynek első koordinátája 1 és adjuk meg a hozzá tartozó sajátértéket is.

5. Határozzuk meg a $17x + 23y = 601$ egyenlet összes olyan megoldását, melyre x és y is pozitív egész.

6*. Legyen A olyan négyzetes mátrix, melyre kizárólag $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül, hogy $A^2\underline{x} = \underline{x}$. Igaz-e, hogy ekkor az $A + E$ mátrixnak biztosan létezik inverze? (E az A-val azonos méretű egységmátrixot jelöli.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

ELSŐ zárthelyi pótlása

2016. december 5.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

2. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^2$-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

3. Döntsük el, hogy a jobbra látható három vektor a p valós paraméter mely értékeire lesz lineárisan független.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Adjuk meg a jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Legyenek A és B olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$ és $A \cdot B = B \cdot A$. Mutassuk meg, hogy ha $A + B$ oszlopai lineárisan független halmazt alkotnak, akkor $A = B$.

6*. Egy négy egyenletből álló egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, melyben valamelyik ismeretlen értéke 0 lenne. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ szám, hogy az egyenletrendszernek nincs olyan megoldása sem, melyben valamelyik ismeretlen értéke a lenne.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet, a Neptun-kódot és a gyakorlatvezető nevét.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

MÁSODIK zárthelyi pótlása

2016. december 5.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés mátrixa a jobbra látható mátrix. Adjunk meg a mátrixával egy olyan $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyre nem létezik olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f \circ g = h$ teljesülne (ahol $f \circ g$ az f és g függvények kompozícióját jelöli). Állításunkat természetesen bizonyítsuk is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, mely minden vektorhoz annak az $x = y$ egyenesre vett tükörképét rendeli. Adjuk meg f-nek a $\{\underline{b_1} = (3,7), \underline{b_2} = (2,5)\}$ bázis szerinti mátrixát. (Azt, hogy f valóban lineáris transzformáció, nem kell belátni.)

4. Tudjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(x, 2)$ vektorhoz a $(4, x)$ vektort rendeli. Határozzuk meg f mátrixának két olyan sajátvektorát, melyek különböző sajátértékekhez tartoznak.

5. Határozzuk meg a $34x + 86y = 4$ egyenlet összes olyan megoldását, amelyre x és y egész.

6*. Legyen A 2×2-es mátrix, $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ pedig olyan 2 magas oszlopvektorok, melyekre teljesül, hogy

$$A\underline{x} = \underline{x}, \quad A\underline{y} = 2\underline{y}, \quad A\underline{z} = 3\underline{z}.$$

Igazoljuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok közül legalább az egyik a nullvektor.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet, a Neptun-kódot és a gyakorlatvezető nevét.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
aláíráspótló vizsga

ELSŐ zárthelyi pótlása

2016. december 16.

1. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 2t + 1$, az S sík egyenlete $4x - 3y + pz = q$. Határozzuk meg az összes olyan p és q értéket, melyre az e egyenes az S síkban fekszik.

2. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^3$-ben azon (x, y, z) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $xy = yz$?

3. Döntsük el, hogy a jobbra látható négy vektor a p valós paraméter mely értékeire lesz lineárisan független.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ p \end{pmatrix}$$

4. Egy 5×5-ös mátrixról annyit tudunk, hogy 19 darab nulla és 6 darab egyes szerepel benne. Hányféle értéket vehet fel a mátrix determinánsa attól függően, hogy az elemeket hogyan helyezzük el?

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan B mátrix létezik, melyre $AB = A$.

6*. Egy öt ismeretlenes egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, de nincs olyan megoldása, melyben valamelyik két ismeretlen ugyanazt az értéket venné fel. Igaz-e, hogy

a) a Gauss-eliminációt elvégezve mindig olyan redukált lépcsős alakot kapunk, melynek négy sora van?

b) a redukált lépcsős alakban az egyik oszlop mindig csupa (-1)-ből áll?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
aláíráspótló vizsga

MÁSODIK zárthelyi pótlása

2016. december 16.

1. Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze és ezen p értékek esetén adjuk meg az inverz mátrix jobb alsó elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & p \end{pmatrix}$$

2. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, melyre $f((1,4)) = (0,1,2)$, $f((4,1)) = (5,4,3)$, $f((2,2)) = (2,3,1)$?

3. Jobbra látható az $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa. Határozzuk meg f képterének és magterének dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. a) Az A mátrixnak sajátértéke a 2. Igaz-e, hogy ekkor A^2-nek sajátértéke a 4?

b) A B^2 mátrixnak sajátértéke a 4. Igaz-e, hogy ekkor B-nek sajátértéke a 2 vagy a (-2)?

5. Oldjuk meg a $34x \equiv 14 \pmod{59}$ lineáris kongruenciát.

6*. Legyenek a, b, c, d rögzített valós számok, melyekre $ad - bc = 1$, legyen továbbá $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynek az $\{(a,b), (c,d)\}$ bázis szerinti mátrixa $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Határozzuk meg f mátrixát.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen döfi az $x+2y+3z=6$ egyenletű síkot az $(1,1,1)$ pontban, az f egyenesről pedig hogy átmegy az $(5,2,-1)$ ponton és a $(13,4,-5)$ ponton. Döntsük el, hogy e-nek és f-nek van-e közös pontja.

* * * * *

Első megoldás. Az e egyenes merőleges a megadott síkra, a sík normálvektora tehát az egyenes irányvektora lesz. (1 pont)
A sík egyenlete alapján a kérdéses irányvektor $\underline{i_1}=(1,2,3)$. (1 pont)
Ismerjük e egy pontját is: (1,1,1), így a paraméteres egyenletrendszerét könnyű felírni: $x=t+1$, $y=2t+1, z=3t+1$. (1 pont)
Az f egyenes egy irányvektorát megkapjuk a két megadott pont (mint helyvektor) különbségeként: $\underline{i_2}=(8,2,-4)$. (1 pont)
Innen f paraméteres egyenletrendszere: $x=8t'+5, y=2t'+2, z=-4t'-1$. (1 pont)
A két paraméteres egyenletrendszerben szereplő t, illetve t' paraméterek nem feltétlenül egyenlők, így érdemes már itt különbözőképp jelölni őket. Ha valaki ezt elmulasztja és a későbbiekben is azonosnak feltételezi t-t és t'-t, az eddigi pontokat (ha egyébként mindent helyesen csinált) persze kapja meg.
A két egyenes esetleges közös pontjának meghatározásához meg kell oldanunk a két paraméteres egyenletrendszer egyesítéseként kapott egyenletrendszert. (1 pont)
$x=t+1=8t'+5$, innen $t=8t'+4$. Ezt az $y=2t+1=2t'+2$ egyenletbe helyettesítve $t'=-\frac{1}{2}$ és így $t=0$ adódik, mely értékekre teljesül a $3t+1=-4t'-1$ egyenlőség is. (3 pont)
Az egyenletrendszernek tehát $t'=-\frac{1}{2}, t=0, x=1, y=1, z=1$ a megoldása, a két egyenesnek így van közös pontja (éspedig az $(1,1,1)$). (1 pont)

A két paraméteres egyenletrendszer helyett dolgozhatunk a belőlük kapott „sima” egyenletrendszerekkel is, ez esetben egy négy egyenletből álló három ismeretlenes rendszert kell megoldanunk. A két „sima” egyenletrendszer felírásáért összesen 1 pontot, a közös megoldásukért 3 pontot, a végkövetkeztetésért 1 pontot adjunk.

Második megoldás. Az f egyenes két megadott pontja rajta van a megadott síkon, (1 pont)
ezért f teljes egészében a síkban fekszik. (2 pont)
Mivel e-nek egyetlen közös pontja van a síkkal (az $(1,1,1)$ pont), (1 pont)

elég azt ellenőrizni, hogy f átmegy-e az $(1,1,1)$ ponton. (2 pont)
Ehhez még f egyenletrendszerét sem kell felírni, elég megnézni, hogy a $(13,4,-5)-(5,2,-1)$ és a $(13,4,-5)-(1,1,1)$ vektorok párhuzamosak-e. (3 pont)
Mivel a kérdéses vektorok ($(8,2,-4)$ és $(12,3,-6)$) párhuzamosak, az $(1,1,1)$ pont rajta van f-en, így közös pontja e-nek és f-nek. (1 pont)

Természetesen ha valaki megmutatja, hogy az $(1,1,1)$ pont rajta van e-n és f-en is, az 10 pontot kapjon, akkor is, ha nem vizsgálja f és a sík viszonyát, a fenti pontok elsősorban akkor alkalmazandók, ha valaki elindul ebbe az irányba, de nem fejezi be a megoldását.

2. Álljon az $\mathbb{R}^4$ V altere azon $\underline{x}$ vektorokból, melyekre $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$ teljesül (ahol x_i az $\underline{x}$ vektor i. koordinátáját jelöli). Adjunk meg egy bázist V-ben és mutassuk is meg róla, hogy bázis. (Azt, hogy V altér, nem kell igazolnunk.)

* * * * *

Az előadáson tanult módszerrel, egyenként választjuk ki a bázis elemeit V elemei közül. Az első vektor legyen például $(0,0,3,1)$. (2 pont)
A második vektort úgy kell választanunk, hogy ne legyen az elsőnek számszorosa, ekkor a két vektor független lesz (hiszen az első vektor nem a nullvektor volt). (1 pont)
E célra nyilván megfelel például az $(1,1,0,0)$ vektor. (1 pont)
Most belátjuk, hogy az $(1,1,0,0),(0,0,3,1)$ rendszer bázisa V-nek. Ehhez azt kell megmutatni, hogy generátorrendszere V-nek, hiszen a függetlenségéről már meggyőződtünk. (2 pont)
Legyen $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ a V tetszőleges eleme, azt kell igazolnunk, hogy ez előáll az $(1,1,0,0)$ és $(0,0,3,1)$ vektorok lineáris kombinációjaként. (1 pont)
$\underline{x} = x_1(1,1,0,0) + x_4(0,0,3,1)$, (2 pont)
hiszen $x_1 = x_2$ és $x_3 = 3x_4$. (1 pont)

3. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok is biztosan lineárisan függetlenek?

* * * * *

Írjuk fel az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) + \beta(\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}) + \gamma(3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) = \underline{0}$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\underline{a} + (\alpha+\beta+\gamma)\underline{b} + (\alpha+3\beta+\gamma)\underline{c} = \underline{0}$$

adódik. (3 pont)
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\beta+3\gamma = 0$, $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\alpha+3\beta+\gamma = 0$. (3 pont)
Ebből minimális számolással $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ adódik. (1 pont)
Az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}+\underline{b}+3\underline{c}$, $3\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációja tehát csak lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + p \cdot x_3 + 9x_4 &= p \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & 0 & p-6 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)

Ha $p \neq 3$, akkor a harmadik és a negyedik sort kicserélve, majd az új harmadik sort $(p-3)$-mal osztva folytatjuk az eliminációt, (2 pont)

melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5\frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+2\frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-6}{p-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)

Innen a megoldás $x_1 = -5\frac{p-6}{p-3}$, $x_2 = 1 + 2\frac{p-6}{p-3}$, $x_3 = \frac{p-6}{p-3}$, $x_4 = 0$. (1 pont)

Ha ezzel szemben $p = 3$, akkor a negyedik sor tilos sor, hiszen a bal oldalon csak 0-k szerepelnek, a jobb oldalon viszont 3, (2 pont)

így ekkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. (1 pont)

Akik a Gauss-eliminációt követik, azoknak a nyilvánvaló (itt nem részletezett) lépésekhez nem muszáj magyarázatot fűzniük, a Gauss-eliminációtól eltérő megoldásokban azonban minden esetben indokolni kell, hogy a megoldáshalmaz miért nem változik, ennek hiányáért lépésenként legalább 1 pont levonása indokolt. Kivétel ez alól az, ha valaki a lépcsős alak eléréséhez a harmadik és a negyedik sort úgy cseréli ki, hogy nem ellenőrzi, hogy $p-3 \neq 0$ teljesül-e, hanem ezt csak a csere után vizsgálja.

5. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

* * * * *

Léteznek ilyen mátrixok, jó például az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ választás, de az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ választás is (meg még sok másik). Jó példa indoklással 10 pont, hiányos indoklás esetén adhatunk részpontszámot. Aki viszont csak két mátrixot ad meg mindennemű bizonyítás nélkül, az akkor is 0 pontot kapjon, ha egyébként a példa jó.

6. Létezik-e olyan n egész szám, melyre az alábbi determináns értéke 0?

$$\begin{vmatrix} 1241 & 1526 & 1566 & n \\ 1914 & 1711 & 896 & 1944 \\ 1552 & 1848 & 1867 & 2004 \\ n+955 & 1896 & 1990 & 1849 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy semmilyen egész n-re sem lesz a determináns 0, mégpedig úgy, hogy belátjuk, hogy a determináns páratlan egész szám. (1 pont)

A bizonyítást a definíciót használva végezzük. Ahhoz, hogy egy, a definícióban szereplő szorzat páratlan legyen, szükséges hogy a második sorból a második, a harmadik sorból a harmadik elemet válasszuk ki, hiszen minden más esetben lenne páros szám a szorzatban, így az maga is páros lenne. (2 pont)

Ha n páros, akkor ugyanilyen okból az első sorból az első elemet kell választanunk, (2 pont)

ahonnan már adódik, hogy a negyedik sorból a negyedik elemet választjuk. Ez a szorzat valóban páratlan lesz és ebben az esetben az egyetlen páratlan a definícióban szereplő szorzatok közül, így ekkor a determináns csakugyan páratlan. (2 pont)

Ha n páratlan, akkor a második és a harmadik sor vizsgálata után a negyediket érdemes megnézni, ebben ugyanis az első elem páros lesz, így innen a negyediket kell választanunk páratlan szorzathoz, (2 pont)
ahonnan adódik, hogy az első sorból ismét az első elemet kell választanunk. Ugyanúgy mint az előző esetben, a determináns most is páratlan. (1 pont)

Azok a hallgatók, akik a paritást nem vizsgálva csak a determináns tulajdonságait vagy a kifejtési tételt próbálják használni (kevés sikerrel) 0-1 pontot kapjanak.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. november 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. a) Legyen A tetszőleges 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy A mindig előállítható 6 darab 1 rangú mátrix összegeként.

b) Legyen B 5 rangú 6×6-os mátrix. Mutassuk meg, hogy B mindig előállítható 5 darab 1 rangú mátrix összegeként.

* * * * *

a) Legyenek C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 az A oszlopai és tegyük fel először, hogy egyik oszlop sem a nullvektor. (0 pont)
Legyen ekkor A_i az a 6×6-os mátrix, melynek i. oszlopa C_i, a többi oszlopa pedig $\underline{0}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$). (1 pont)
Ekkor $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ (1 pont)
és minden A_i rangja 1. (1 pont)
Ha a C_i-k között nullvektor is van, de nem mind nullvektor (mondjuk $C_1, \ldots, C_k = \underline{0}$, $k \le 5$), akkor $A_1, \ldots, A_k$ első oszlopa legyen C_6, a többi oszlopa $\underline{0}$, A_6 első oszlopa pedig legyen $-kC_6$, hatodik oszlopa C_6, a többi oszlopa $\underline{0}$. A többi A_i-t a korábbi módon definiáljuk. Nyilván ekkor is $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ és minden A_i rangja 1. (1 pont)
Végül, ha A minden oszlopa a nullvektor, azaz A nullmátrix, akkor legyen F tetszőleges 1 rangú mátrix, ekkor persze $-F$ is 1 rangú és $A = F + F + F + (-F) + (-F) + (-F)$. (1 pont)

b) B rangja 5, így B-nek létezik 5 független oszlopa (legyenek ezek — az általánosság korlátozása nélkül — az első öt oszlop: D_1, D_2, D_3, D_4, D_5), (1 pont)
a hatodik oszlop (legyen ez D_6) pedig előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként, (1 pont)
ellenkező esetben — az újonnan érkező vektor lemmája miatt — a hat oszlop független lenne, ami lehetetlen. (1 pont)
Legyen tehát $D_6 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 + \lambda_5 D_5$. Legyen most $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén B_i az a 6×6-os mátrix, melynek i. oszlopa D_i, hatodik oszlopa $\lambda_i D_i$, a többi oszlopa pedig $\underline{0}$. (1 pont)
Ekkor $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$ és minden B_i rangja 1. (1 pont)

Ha valaki az a) feladatban nem foglalkozik azzal, hogy az oszlopok nullvektorok is lehetnek, akkor (ha egyébként jó a megoldása, vagyis tulajdonképpen azt látja be, hogy A előáll 6 legfeljebb 1 rangú mátrix összegeként) 3 pontot kapjon.

2. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, mely az $(1,0)$ vektorhoz, az $(1,1)$ vektorhoz és az $(1,2)$ vektorhoz is az $(1,2)$ vektort rendeli? Ha igen, adjuk meg a mátrixát.

* * * * *

Ha alkalmas f lineáris transzformációt keresünk, akkor a lineáris leképezések tanult tulajdonságai miatt $f(0,1) = f((1,1)-(1,0)) = f(1,1) - f(1,0) = (0,0)$. (2 pont)
Így a tanultak szerint f mátrixa csak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ lehet (de ezen a ponton még nem tudjuk, hogy van-e ilyen f). (3 pont)
Könnyen ellenőrizhető, hogy $A \cdot (1,0)^T = (1,2)^T$, (1 pont)
$A \cdot (1,1)^T = (1,2)^T$ (1 pont)
és $A \cdot (1,2)^T = (1,2)^T$ is teljesül, (1 pont)
így az az f lineáris transzformáció, melynek mátrixa A, alkalmas lesz; és ezzel persze f mátrixát is megadtuk. (2 pont)

A jó mátrixot természetesen máshogy is meg lehet találni, akár még hasraütéses alapon is, de az első 5 pont akkor jár, ha valami kiderül arról, hogy miért épp ez a mátrix érdekes (pl. mert vele balról szorozva a megadott vektorokat épp a jó eredmények jönnek ki vagy mert felírtunk egy egyenletrendszert és annak lett ez a megoldása stb.) Ha valaki csak azt mutatja meg, hogy egy f lineáris transzformáció esetén az $f(1,0) = f(1,1) = (1,2)$ állításból következik $f(1,2) = (1,2)$, az 3 pontot kapjon. Akiben felmerül az igény arra, hogy ezen túlmenően ilyen lineáris transzformáció létezését valahogy megmutassa, az további 1 pontot kaphat.

3. Legyen $\underline{b}_1 = (2,1)$, $\underline{b}_2 = (3,1)$, $\underline{c}_1 = (1,1)$, $\underline{c}_2 = (1,0)$ és legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynek a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerinti mátrixa $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg f-nek a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis szerinti mátrixát.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázist B-vel, a $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázist C-vel. $[f]_C$ első oszlopa a tanultak szerint $[f(\underline{c}_1)]_C$, második oszlopa $[f(\underline{c}_2)]_C$. (1 pont)
A lineáris leképezések ismert tulajdonsága szerint $f(\underline{c}_2) = f(1,0) = f((3,1)-(2,1)) = f(3,1) - f(2,1)$. (1 pont)
$f(3,1) = f(\underline{b}_2)$-t és $f(2,1) = f(\underline{b}_1)$-et az $[f]_B$ mátrixból határozhatjuk meg: annak első oszlopa ugyanis $[f(\underline{b}_1)]_B$, második oszlopa $[f(\underline{b}_2)]_B$. (1 pont)
Ezek alapján $f(\underline{b}_1) = 5\underline{b}_1 + 7\underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = 6\underline{b}_1 + 8\underline{b}_2$, (2 pont)
tehát $f(\underline{c}_2) = f(\underline{b}_2) - f(\underline{b}_1) = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 = (5,2)$. (1 pont)
Hasonlóan számíthatjuk ki $f(\underline{c}_1)$-et: $f(\underline{c}_1) = f(1,1) = f((2,1)-(1,0)) = f(2,1) - f(1,0) = (5\underline{b}_1 + 7\underline{b}_2) - (\underline{b}_1 + \underline{b}_2) = 4\underline{b}_1 + 6\underline{b}_2 = (26,10)$. (2 pont)
A $(26,10)$ vektor C szerinti koordinátavektora $(10,16)$, az $(5,2)$ vektor C szerinti koordinátavektora $(2,3)$ (mivel $\underline{c}_2$ második koordinátája 0, a koordinátavektorok számítása nem okoz problémát), (1 pont)
a keresett mátrix így $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Második megoldás. B-vel (illetve C-vel) jelölve a B (illetve C) bázisok (oszlop)vektorainak egyesítésével keletkező mátrixot, a következő összefüggéseket írhatjuk fel a bázistranszformációról tanultak alapján: $[f]_C = C^{-1}[f]C$ és $[f]_B = B^{-1}[f]B$. (2 pont)
A második egyenlőségből könnyen meghatározhatjuk $[f]$-et: $[f] = B[f]_B B^{-1}$ (ahol $[f]_B$-t és B-t ismerjük, B^{-1}-et pedig B-ből Gauss-elimináció segítségével ki tudjuk számítani). (2 pont)
$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, (2 pont)
ahonnan $[f] = \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Most már nem nehéz $[f]_C$-t sem meghatározni, ehhez még a C^{-1} mátrixra lesz szükség, amit B^{-1}-hez hasonlóan Gauss-eliminációval számíthatunk ki: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

$[f]_C = C^{-1}[f]C = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

4. Legyen A a jobbra látható mátrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Döntsük el, hogy A-nak sajátértéke-e a 2.

b) Döntsük el, hogy A-nak sajátvektora-e a $(2, 1, -1)$ vektor.

c) Adjuk meg A-nak egy olyan sajátvektorát, melynek első koordinátája 1 és adjuk meg a hozzá tartozó sajátértéket is.

* * * * *

a) Azt kell eldöntenünk, hogy létezik-e olyan $\underline{v} = (x, y, z)^T \neq (0, 0, 0)^T$ vektor, melyre $A\underline{v} = 2\underline{v}$. (A továbbiakban a transzponált jelölését mellőzzük.) (1 pont)

Ilyen vektor pontosan akkor létezik, ha a $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszernek van a csupa 0-tól különböző megoldása. (2 pont)

A Gauss-elimináció során 3 vezéregyest kapunk, így csak egy megoldás lesz ($x = y = z = 0$), a 2 tehát nem sajátérték. (2 pont)

b) Azt kell eldöntenünk, hogy $A \cdot (2, 1, -1)$ a $(2, 1, -1)$ vektornak számszorosa-e. (1 pont)
$A \cdot (2, 1, -1) = (-6, -3, 3)$, így a $(2, 1, -1)$ vektor sajátvektor. (1 pont)

c) Mivel $A \cdot (2, 1, -1) = (-6, -3, 3)$, a mátrixszorzásról tanultak szerint $A \cdot (1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = A \cdot (\frac{1}{2}(2, 1, -1)) = \frac{1}{2}A \cdot (2, 1, -1) = \frac{1}{2}(-6, -3, 3) = (-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, (2 pont)
az $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ vektor olyan sajátvektor lesz, melynek első koordinátája 1, a hozzá tartozó sajátérték -3. (1 pont)

5. Határozzuk meg a $17x + 23y = 601$ egyenlet összes olyan megoldását, melyre x és y is pozitív egész.

* * * * *

A feladat szövege szerint az x egészre teljesül, hogy $17x \equiv 601 \pmod{23}$. (1 pont)
A bal oldalon $23x$-et, a jobb oldalon $23 \cdot 26$-ot kivonva a $-6x \equiv 3 \pmod{23}$ kongruenciát kapjuk. (2 pont)
-3-mal osztva $2x \equiv -1 \pmod{23}$ adódik (mivel -3 és 23 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (1 pont)
A jobb oldalhoz 23-at adva $2x \equiv 22 \pmod{23}$, ahonnan 2-vel osztva $x \equiv 11 \pmod{23}$ (mivel 2 és 23 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (1 pont)
Az x szám tehát $23k + 11$ alakba írható (ahol k egész). (1 pont)
Innen $y = \frac{601-17(23k+11)}{23}$, (1 pont)
vagyis $y = 18 - 17k$. (1 pont)
Az x, y megoldáspárok közül azokat kell megadnunk, melyekre x és y is pozitív. x pozitivitása azzal ekvivalens, hogy $k \geq 0$, míg y pozitivitása azzal, hogy $k \leq 1$. (1 pont)
Az alkalmas párokat tehát a $k = 0$ és a $k = 1$ esetben kapjuk: $x = 11, y = 18$, illetve $x = 34, y = 1$. (1 pont)

Ha valaki a kongruenciát nem tudja megoldani, de megállapítja, hogy annak van megoldása, az ezért kaphat 1 pontot. Aki nem részletezi, hogy az osztások során nem változik a modulus, attól nem kell pontot levonni (mivel ez többé-kevésbé magától értetődő), ha azonban valaki más módon oldja meg a kongruenciát és ennek során nem ennyire egyértelmű szituációkban mulasztja el a modulus vizsgálatát, attól minden ilyen hiányosságért vonjunk le 1 pontot. Ha valaki esetleg szorozza a kongruenciát és nem foglalkozik az esetleges hamis gyökökkel, attól ilyen hiányosságokért 2 pontot vonjunk le. Aki a kongruencia megoldása érdekében céltalan, nem előremutató lépéseket végez (és a megoldást persze nem kapja meg), az erre a részre ne kapjon pontot.

6*. Legyen A olyan négyzetes mátrix, melyre kizárólag $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül, hogy $A^2\underline{x} = \underline{x}$. Igaz-e, hogy ekkor az $A + E$ mátrixnak biztosan létezik inverze? (E az A-val azonos méretű egységmátrixot jelöli.)

* * * * *

A feladatbeli feltétel ekvivalens azzal, hogy $A^2\underline{x} - E\underline{x} = \underline{0}$ csak $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül, (1 pont)
ez pedig azzal, hogy $(A^2 - E)\underline{x} = \underline{0}$ csak $\underline{x} = \underline{0}$ esetén teljesül. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy az $(A^2 - E|\underline{0})$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, (2 pont)
vagyis a tanultak szerint (mivel $A^2 - E$ négyzetes mátrix) $\det(A^2 - E) \neq 0$. (1 pont)
$(A + E)(A - E) = A^2 + EA - AE - E^2 = A^2 - E^2 = A^2 - E$ miatt, (3 pont)
a determinánsok szorzástételét használva $\det(A^2 - E) = \det(A + E) \cdot \det(A - E)$, (1 pont)
vagyis $\det(A + E)$ sem 0, ahonnan $A + E$ invertálhatósága azonnal következik. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. december 5.
ELSŐ ZH PÓTLÁSA

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

* * * * *

A két egyenes paraméteres egyenletrendszerét felírva (vagy akár anélkül is) leolvasható, hogy e-nek irányvektora az $(1, 3, 5)$ vektor, f-nek pedig irányvektora a $(-2, -6, -10)$ vektor, (1 pont)
vagyis a két egyenes párhuzamos (hiszen az irányvektoraik párhuzamosak). (1 pont)
Mivel e-n rajta van a $P(0, 0, 0)$ pont és f-en a $Q(0, 3, 2)$, (1 pont)
ezért $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (0, 3, 2)$ párhuzamos az e-t és f-et tartalmazó S síkkal (ahol $\underline{q}$ és $\underline{p}$ a megfelelő pontokba mutató helyvektorok). (1 pont)
Párhuzamos ezen kívül S-sel az egyenesek bármely közös $\underline{v}$ irányvektora is, ezért S-nek normálvektora lesz az $\underline{n} = \underline{v} \times \overrightarrow{PQ}$ vektor. (2 pont)
Ezt a tanult képlettel határozzuk meg:

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k} = (-9, -2, 3). \qquad \text{(2 pont)}$$

A kapott $\underline{n}$ normálvektor és P (vagy Q) segítségével S egyenlete már a tanult képlettel felírható: $-9x - 2y + 3z = 0$. (2 pont)
A megoldás során valamikor meg kell vizsgálni, hogy a $\underline{v}$, illetve $\overrightarrow{PQ}$ vektorok nem párhuzamosak-e, ekkor ugyanis a vektoriális szorzatuk nem lenne alkalmas normálvektornak. Ez persze következik abból, hogy e és f párhuzamosak, de nem esnek egybe, vagy abból is, hogy a vektoriális szorzat nem a nullvektor lett és persze a két vektor alapján közvetlenül is leolvasható. Ennek hiányáért mindenesetre ne vonjunk le pontot. Ha egy megoldó az egyenesek irányvektorait hibásan olvassa ki és ezért arra a következtetésre jut (a hibás irányvektorokból helyesen), hogy e és f nem párhuzamosak, akkor ezért a fenti pontozás szerint járó 1 pontot megkaphatja.

2. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^2$-ben azon (x, y) vektorok halmaza, melyekre teljesül, hogy $x^2 = y^2$?

* * * * *

A kérdéses vektorok halmaza pontosan akkor alkot alteret, ha zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, (0 pont)
vagyis bármely két, a feltételt kielégítő vektor összege is kielégíti a feltételt és bármely, a feltételt kielégítő vektor minden számszorosa is kielégíti a feltételt. (2 pont)
Legyen $\underline{u} = (1, 1)$, $\underline{v} = (-1, 1)$. Ekkor nyilván $\underline{u}$ és $\underline{v}$ is kielégíti a feltételt, (2 pont)
az $\underline{u} + \underline{v} = (0, 2)$ vektor azonban nem, (5 pont)
így a kérdéses vektorok nem alkotnak alteret. (1 pont)

Ha valaki nem talál ellenpéldát, de a skalárszorosra való zártságot (helyesen) megállapítja, az (az esetlegesen járó első 2 ponton felül) kaphat 1 pontot.

3. Döntsük el, hogy a jobbra látható három vektor a p valós paraméter mely értékeire lesz lineárisan független.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. Az első és a harmadik vektor független halmazt alkot, hiszen egyik sem számszorosa a másiknak. Az újonnan érkező vektor lemmája miatt a második vektorral együtt tehát pontosan akkor alkotnak független halmazt, ha az nem áll elő az első és a harmadik lineáris kombinációjaként. (3 pont)
Az első két koordinátát vizsgálva az derül ki, hogy ha a második vektor az első és a harmadik lineáris kombinációja, akkor az elsőt 4-szer, a másodikat 3-szor kell vennünk. (3 pont)
Ez a harmadik koordinátákhoz is megfelel, (1 pont)
a negyedikekhez pedig pontosan akkor, ha $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = p$, vagyis $p = 5$ esetén. (2 pont)
Ez lesz tehát az egyetlen olyan p, amire a három vektor nem független, a feladat kérdésére tehát a válasz: minden $p \neq 5$ esetén. (1 pont)

Második megoldás. Legyenek a vektorok sorban $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ és vizsgáljuk meg az $a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w} = \underline{0}$ egyenlőséget. (1 pont)
A három vektor pontosan akkor lesz független, ha ez csak $a = b = c = 0$ esetén teljesül. (1 pont)
A fenti vektoregyenlet ekvivalens az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 14 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & p & 0 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixú egyenletrendszerrel (2 pont)
ezt Gauss-eliminálva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0p-3 & 0 & \end{array}\right).$$

(2 pont)
ennek pontosan akkor lesz az egyetlen megoldása $a = b = c = d = 0$, ha létre tudjuk hozni a negyedik vezéregyest is, (1 pont)
vagyis ha $p \neq 3$ (3 pont)

4. Adjuk meg a jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Ha nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak az 5-öt választhatjuk, (1 pont)
így az ötödik sorból a 4-et már nem, csak a 7-et választhatjuk (mert a negyedik oszlopból már vettünk elemet). (1 pont)
Hasonlóan folytatva, az első sorból csak az 1-et, (1 pont)
ezért a másodikból csak a 8-at, (1 pont)
végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk. (1 pont)
Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3$. Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,2,4,3,1 (hiszen az első sorból az ötödik elemet vettük, a másodikból a másodikat, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 8 (hiszen 8 inverzióban álló pár van: $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,1)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: +. (1 pont)

5. Legyenek A és B olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $A \cdot A = B \cdot B$ és $A \cdot B = B \cdot A$. Mutassuk meg, hogy ha $A + B$ oszlopai lineárisan független halmazt alkotnak, akkor $A = B$.

* * * * *

Figyeljük meg, hogy $(A + B) \cdot (A - B) = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ az $n \times n$-es csupa 0 mátrixot jelöli. (2 pont)
Valóban, $(A+B) \cdot (A-B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A \cdot A - B \cdot B = \mathbf{0}$, ahol az első egyenlőség a mátrixszorzás disztributivitása miatt teljesül, a második egyenlőség $A \cdot B = B \cdot A$ miatt, végül a harmadik $A \cdot A = B \cdot B$ miatt. (4 pont)
Az $(A + B) \cdot (A - B)$ mátrix oszlopai az $A + B$ mátrix oszlopainak lineáris kombinációi. (1 pont)
Ha $A = B$ nem teljesül, akkor $A - B$ nem a nullmátrix, (1 pont)
ezért $A + B$ oszlopainak lesz olyan nem triviális lineáris kombinációja, mely a nullvektort adja (hiszen $(A + B) \cdot (A - B)$ minden oszlopa nullvektor), amivel a feladat állítását beláttuk. (2 pont)

6*. Egy négy egyenletből álló egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, melyben valamelyik ismeretlen értéke 0 lenne. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ szám, hogy az egyenletrendszernek nincs olyan megoldása sem, melyben valamelyik ismeretlen értéke a lenne.

* * * * *

Ha egy egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, melyben valamelyik ismeretlen értéke 0 lenne, akkor vagy egyáltalán nincs megoldás, (1 pont)
vagy a kibővített együtthatómátrixot Gauss-eliminációval lépcsős alakra hozva nem kapunk szabad paramétert (hiszen a szabad paraméter bármilyen értéket, így 0-t is felvehet). (2 pont)
Szabad paraméter azokhoz az oszlopokhoz tartozik, melyekben nincs vezéregyes. (1 pont)
A Gauss-elimináció után a mátrixnak legfeljebb négy sora van, így legfeljebb négy vezéregyes szerepelhet benne, (1 pont)
vagyis ha nincs szabad paraméter, akkor legfeljebb négy oszlopa lehet. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy az ismeretlenek száma az egyenletrendszerben legfeljebb négy. (1 pont)
Mivel nincs szabad paraméter, ha van megoldás, akkor az egyértelmű, (1 pont)
így csak négy olyan szám létezhet, amelyet a megoldásban valamelyik ismeretlen felvesz, (1 pont)
amiből a feladat állítása következik (hiszen a értékét öt szám közül választhatjuk). (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. december 5.
MÁSODIK ZH PÓTLÁSA

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tanultak szerint a rang egyenlő a mátrixból Gauss-eliminációval kapott lépcsős alakban szereplő vezéregyesek számával. (2 pont)
A mátrix első sorát a másodikból levonva, majd az első sor x-szeresét a a harmadik sorból levonva az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-x^2 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (2 pont)
A második oszlopban tehát pontosan akkor lesz vezéregyes, ha $x \neq 1$. (1 pont)
A második sort ekkor ($x \neq 1$) $(x-1)$-gyel osztva valóban megkapjuk a második vezéregyest. (1 pont)
Ha most $x \neq 0$ is teljesül, akkor a harmadik oszlopban is lesz vezéregyes, (1 pont)
tehát a mátrix rangja ekkor ($x \neq 0, x \neq 1$) 3. (1 pont)
Ha $x = 0$, akkor a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így ekkor a rang 2. (1 pont)
Végül, ha $x = 1$, akkor sem a második, sem a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így ekkor a rang 1. (1 pont)

Ha valaki csak azt bizonyítja be, hogy a rang $x = 1$ esetén 1, az 1 pontot kapjon, aki pedig azt, hogy $x = 0$ esetén a rang 2, az 2 pontot.

2. Legyen az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés mátrixa a jobbra látható mátrix. Adjunk meg a mátrixával egy olyan $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyre nem létezik olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f \circ g = h$ teljesülne (ahol $f \circ g$ az f és g függvények kompozícióját jelöli). Állításunkat természetesen bizonyítsuk is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A tanultak szerint $[f \circ g] = [f] \cdot [g]$. (1 pont)
Ha tehát sikerülne olyan $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrixot megadnunk, melyre nem létezik olyan $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, melyre $[f] \cdot B = A$, (2 pont)
akkor az a h lineáris leképezés, melynek A a mátrixa, megfelelne a feladat feltételének, (1 pont)
hiszen ha lenne olyan $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $f \circ g = h$ teljesülne, akkor $A = [h] = [f \circ g] = [f] \cdot [g]$ lenne, ami lehetetlen. (1 pont)
Ilyen A mátrixot viszont nem nehéz megadni: mivel $[f] \cdot B$ oszlopai az $[f]$ oszlopainak a lineáris kombinációi, (2 pont)
elég, ha A-nak van olyan oszlopa (mondjuk az első), ami nem áll elő $[f]$ oszlopainak a lineáris kombinációjaként. (1 pont)

Ilyen mátrix például $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (1 pont)

hiszen az első oszlop első három koordinátáját megfigyelve az derül ki, hogy az első oszlop csak akkor lehetne $[f]$ oszlopainak lineáris kombinációja, ha minden együttható 1, ekkor viszont a negyedik koordináta nem 0 lenne, hanem 6. (1 pont)

3. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, mely minden vektorhoz annak az $x = y$ egyenesre vett tükörképét rendeli. Adjuk meg f-nek a $\{\underline{b_1} = (3,7), \underline{b_2} = (2,5)\}$ bázis szerinti mátrixát. (Azt, hogy f valóban lineáris transzformáció, nem kell belátni.)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Első megoldás. Jelöljük a $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázist B-vel. $[f]_B$ első oszlopa a tanultak szerint $[f(\underline{b}_1)]_B$, második oszlopa $[f(\underline{b}_2)]_B$. (2 pont)
$f(\underline{b}_1)$-et és $f(\underline{b}_2)$-t nem nehéz meghatározni, az előbbi a $(7,3)$ vektor, az utóbbi az $(5,2)$ vektor. (1 pont)
A $(7,3)$ vektor B szerinti koordinátavektorát Gauss-eliminációval (vagy máshogy) kiszámítva a $(29,-40)$ vektort kapjuk, (3 pont)
az $(5,2)$ vektor B szerinti koordinátavektorának pedig $(21,-29)$ adódik. (3 pont)
A keresett mátrix tehát $\begin{pmatrix} 29 & 21 \\ -40 & -29 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Második megoldás. B-vel jelölve a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis (oszlop)vektorainak egyesítésével keletkező mátrixot, a következő összefüggést írhatjuk fel a bázistranszformációról tanultak alapján: $[f]_B = B^{-1}[f]B$. (1 pont)
A B^{-1} mátrixot Gauss-eliminációval kiszámítva $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ adódik. (3 pont)
Az $[f]$ mátrix kiszámításához $f(1,0)$-t és $f(0,1)$-et kell meghatároznunk, az előbbi $(0,1)$, az utóbbi $(1,0)$ lesz, (2 pont)
ez alapján $[f] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Innen $[f]_B = B^{-1}[f]B = \begin{pmatrix} 29 & 21 \\ -40 & -29 \end{pmatrix}$. (2 pont)

4. Tudjuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(x, 2)$ vektorhoz a $(4, x)$ vektort rendeli. Határozzuk meg f mátrixának két olyan sajátvektorát, melyek különböző sajátértékekhez tartoznak.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük f mátrixát A-val. A könnyen kiszámítható például az $f(0, 2) = (4, 0)$ és az $f(2, 2) = (4, 2)$ egyenlőségekből (melyeket az $x = 0$, illetve $x = 2$ értékek behelyettesítésével kapunk). (2 pont)

A lineáris leképezések ismert szabályait alkalmazva az első egyenlőségből $f(0, 1) = (2, 0)$, a két egyenlőségből együtt $f(1, 0) = f(\frac{1}{2}(2, 2) - (0, 1)) = \frac{1}{2}f(2, 2) - f(0, 1) = (0, 1)$. (2 pont)

Innen $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (1 pont)

(Könnyű ellenőrizni, hogy az a lineáris leképezés, aminek a most megadott A a mátrixa, csakugyan minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(x, 2)$ vektorhoz a $(4, x)$ vektort rendeli, de erre nincs szükség, mert a feladat szövegéből ez már következett.) A sajátértékek meghatározásához az A mátrix karakterisztikus polinomját a szokott módon felírva $x^2 - 2$ adódik, (1 pont)

melynek a $\sqrt{2}$ és a $-\sqrt{2}$ a gyökei, ezek lesznek a sajátértékek. (2 pont)

A $\sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektorok a $(\sqrt{2}y, y)$ alakú vektorok (ahol $y \neq 0$), a $-\sqrt{2}$-höz tartozó sajátvektorok a $(-\sqrt{2}y, y)$ alakú vektorok (ahol $y \neq 0$). A feladat ugyanakkor nem kérte, hogy adjuk meg az összes sajátvektort, elég megadni egyet a $\sqrt{2}$-höz (pl. $(\sqrt{2}, 1)$) és egyet a $-\sqrt{2}$-höz (pl. $(-\sqrt{2}, 1)$). (2 pont)

Rosszul felírt mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak helyes meghatározásáért is jár az utolsó 5 pont, ha azonban a rossz mátrixnak nincsenek sajátértékei, akkor legfeljebb 2 pont adható.

Második megoldás. Jelöljük f mátrixát A-val. Keressünk a sajátvektorok közt olyat, aminek a második koordinátája 2 (nincs rá garancia, hogy van ilyen, de mivel őket egyszerű keresni, érdemes vele megpróbálkozni). (1 pont)

$(x, 2)$ pontosan akkor lesz sajátvektor, c sajátértékkel, ha $A \cdot (x, 2) = c \cdot (x, 2)$. (1 pont)

Ekkor $(cx, 2c) = c \cdot (x, 2) = A \cdot (x, 2) = f(x, 2) = (4, x)$, (2 pont)

így $cx = 4$ és $2c = x$, (1 pont)

ahonnan $c^2 = 2$, (1 pont)

vagyis $c = \sqrt{2}$ vagy $c = -\sqrt{2}$. (1 pont)

Az előbbi esetben $x = 2\sqrt{2}$, az utóbbiban $x = -2\sqrt{2}$ (1 pont)

és ellenőrzés után meggyőződhetünk róla, hogy $(2\sqrt{2}, 2)$ és $(-2\sqrt{2}, 2)$ csakugyan az A sajátvektorai, amik különböző sajátértékekhez tartoznak. (2 pont)

5. Határozzuk meg a $34x + 86y = 4$ egyenlet összes olyan megoldását, amelyre x és y egész.

* * * * *

Érdemes az egyenletet rögtön osztani 2-vel, de persze enélkül is megoldható a feladat. A szöveg szerint az x egészre teljesül, hogy $17x \equiv 2 \pmod{43}$. (1 pont)

A kongruenciát 2-vel szorozva $34x \equiv 4 \pmod{43}$ adódik, (1 pont)

ami az eredeti kongruenciával ekvivalens, hiszen 2 és 43 relatív prímek. (1 pont)

A bal oldalból $43x$-et kivonva, a jobb oldalhoz pedig 86-ot adva a $-9x \equiv 90 \pmod{43}$ kongruenciát kapjuk, (2 pont)

ahonnan (-9)-cel osztva $x \equiv -10 \pmod{43}$ (mivel -9 és 43 relatív prímek, a modulust nem kellett megváltoztatni). (2 pont)

Az x szám tehát $43k - 10$ alakba írható (ahol k egész). (1 pont)

Innen $y = \frac{2-17(43k-10)}{43}$, (1 pont)

vagyis $y = 4 - 17k$. (1 pont)

Ha valaki a kongruenciát nem tudja megoldani, de megállapítja, hogy annak van megoldása, az ezért kaphat 1 pontot. Aki nem foglalkozik azzal, hogy az osztás során változik-e a modulus, attól 1 pontot vonjunk le, ha valaki más módon oldja meg a kongruenciát és többször is mulasztást követ el az osztások során, attól minden ilyen hiányosságért vonjunk le 1 pontot. Hasonló a helyzet a szorzással: aki nem ellenőrzi az új és a régi kongruencia ekvivalenciáját és később sem foglalkozik az esetleges hamis gyökökkel, attól minden ilyen hiányosságért 1 pontot vonjunk le. Aki a kongruencia megoldása érdekében céltalan, nem előremutató lépéseket végez (és a megoldást persze nem kapja meg), az erre a részre ne kapjon pontot. Ha valaki a $17x \equiv 2 \pmod{43}$ kongruencia helyett a (könnyebben kezelhető) $43y \equiv 2 \pmod{17}$ kongruenciát oldja meg (helyesen), az persze ugyanúgy kapja meg az erre a részre járó 7 pontot.

6*. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ pedig olyan 2 magas oszlopvektorok, melyekre teljesül, hogy

$$A\underline{x} = \underline{x}, \quad A\underline{y} = 2\underline{y}, \quad A\underline{z} = 3\underline{z}.$$

Igazoljuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok közül legalább az egyike a nullvektor.

* * * * *

Ha $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ egyike sem a nullvektor, (1 pont)
akkor a sajátérték definíciója szerint az 1, a 2 és a 3 is az A sajátértéke lesz, (4 pont)
ami lehetetlen, hiszen a sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, (1 pont)
A pedig 2×2-es mátrix, aminek karakterisztikus polinomja másodfokú, (2 pont)
vagyis (a másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint) legfeljebb két gyöke lehet. (2 pont)

Az előadáson szóba került (bár persze nem bizonyítottuk be), hogy $n \times n$-es mátrixnak legfeljebb n sajátértéke lehet, így ha valaki ezt az állítást használja a bizonyítás során, attól ezért ne vonjunk le pontot.