Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2013. október 24.

1. Írjuk fel a háromdimenziós tér $P = (1, 1, 1)$ és $Q = (3, 1, 5)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az y tengelyt?

2. Legyen U tetszőleges vektortér, V és W pedig U alterei. Mutassuk meg, hogy ekkor $V \cap W$ is altere U-nak.

3. Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c és d paraméterek minden értékére.

$$\begin{aligned} x + 2z &= 5 \\ 2x - y &= 8 \\ 3x + 6y + cz &= d \end{aligned}$$

5. Egy 5×5–ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor legfeljebb 20 nullától különböző szorzatot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor a mátrix legalább 5 nullát tartalmaz.

6. Létezik-e olyan 2×3–as A és 3×2–es B mátrix, melyek egyike sem áll csupa 0-ból, de az AB és a BA szorzatmátrixok mindketten csupa 0-ból állnak?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. zárthelyi

2013. november 28.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

2. Legyen $n \geq 10$ egész szám. Az A $n \times n$-es mátrix rangja 10, a B $n \times n$-es mátrix rangja n. Határozzuk meg AB rangját.

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az $(1, 0)$ vektorhoz a $(0, 1)$ vektort, a $(0, 1)$ vektorhoz a $(2, 1)$ vektort, a $(2, 1)$ vektorhoz pedig az $(1, 0)$ vektort rendeli?

4. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

5. A sík egy lineáris transzformációja a $(2, 1)$ vektorhoz az $(1, 1)$ vektort rendeli, az $(1, 1)$ vektorhoz pedig a $(2, 1)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció egy sajátvektorát és a hozzá tartozó sajátértéket.

6. Adjuk meg algebrai (más néven kanonikus) alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós és a képzetes része is pozitív.

$$(-5\sqrt{2} + \sqrt{2}i)z^5 = 12 + 8i$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

ELSŐ zárthelyi pótlása

2013. december 9.

1. Mely a valós számokra teljesül, hogy az $ax+2y+3z=4$ egyenletű síknak és az $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{4}$ egyenletrendszerű egyenesnek nincsen közös pontja?

2. Legyenek U és W a V vektortér alterei. Bizonyítsuk be, hogy $U \cup W$ akkor és csak akkor altere V-nek, ha vagy $U \subseteq W$, vagy $W \subseteq U$ fennáll.

3. Független rendszert alkotnak-e az

a) $(1,1,1,3),(1,1,3,1)(1,3,1,1),(3,1,1,1)$ vektorok?

b) $(1,1,1,-3),(1,1,-3,1)(1,-3,1,1),(-3,1,1,1)$ vektorok?

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} 3x+5y+z &= 4 \\ 2x+y+cz &= c \\ 2x+4y &= 6 \end{aligned}$$

5. Egy négyzetes mátrixot nevezzünk kellemesnek, ha determinánsának definíció szerinti kiszámításakor pontosan 1 nullától különböző szorzatot kapunk.

a) Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$–es mátrix kellemes, akkor legalább $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén létezik $n \times n$–es kellemes mátrix, ami pontosan $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hány olyan 2×2–es B mátrix létezik, melyre $AB = A$?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

MÁSODIK zárthelyi pótlása

2013. december 9.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre a BA mátrix a 3×3-as egységmátrix.

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az x valós szám függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely a $(0, 1)$ vektorhoz és az $(1, 0)$ vektorhoz is az $(1, 1)$ vektort rendeli?

4. Az A mátrixnak k sora és 2^k oszlopa van. Az oszlopok (valamilyen sorrendben) éppen az összes különböző k hosszúságú 0-1 sorozatok. Hány dimenziós annak az $\mathbb{R}^{2^k}$-ból $\mathbb{R}^k$-ba menő lineáris leképezésnek a magtere, melynek mátrixa a szokásos bázisban A?

5. Legyenek u és v egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $u + v$ is sajátvektora ugyanannak a transzformációnak?

6. Határozzuk meg a $(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i)^3$ komplex szám hosszának (abszolút értékének) egész részét.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptunkód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I. aláíráspótló vizsga

ELSŐ zárthelyi pótlása

2013. december 17.

1. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékére lesz az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$ és az $\frac{x-3}{2} = \frac{y-p}{3} = \frac{z}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek közös pontja.

2. Létezik-e olyan λ valós szám, melyre a λ determinánsú 3×3-as mátrixok vektorteret alkotnak a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel?

3. Egy V vektortérben az a, b, c vektorok független rendszert alkotnak. Igaz-e, hogy ekkor az $a+2b, b+2c, c+2a$ vektorok is biztosan függetlenek V-ben?

4. a) Egy négy egyenletből álló, négy ismeretlenes egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Igaz-e, hogy a jobb oldalak tetszőleges megváltoztatásával kapott egyenletrendszereknek is pontosan egy megoldása van?

b) Egy öt egyenletből álló, négy ismeretlenes egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Igaz-e, hogy a jobb oldalak tetszőleges megváltoztatásával kapott egyenletrendszereknek is pontosan egy megoldása van?

5. Létezik-e olyan nem nulla determinánsú 5×5–ös mátrix, melyben 4 nulla és 21 egyes szerepel?

6. Adjuk meg az alábbi determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I. aláíráspótló vizsga

MÁSODIK zárthelyi pótlása

2013. december 17.

1. Legyenek A, B, C olyan 2×2-es mátrixok, melyekre ABC az egységmátrix.
a) Igaz-e, hogy ekkor CAB is biztosan az egységmátrix?
b) Igaz-e, hogy ekkor BCA is biztosan az egységmátrix?
c) Igaz-e, hogy ekkor BAC is biztosan az egységmátrix?

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az x, y valós számok függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Létezik-e olyan $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, melyre $\mathcal{A}((2,3)) = (1,0,0)$, $\mathcal{A}((5,6)) = (0,1,0)$ és $\mathcal{A}((11,12)) = (0,0,1)$?

4. A tér egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a transzformáció egy sajátértékét és egy sajátvektorát.

5. Legyenek u és v az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $u + v$ sajátvektora $\mathcal{A}^2$-nek?

6. Adjuk meg algebrai (kanonikus) alakban $-1 - \sqrt{2}i$ négyzetének hatodik gyökei közül azokat, amelyek valós része negatív, képzetes része pedig pozitív.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a nevet és a Neptun-kódot.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Mindenkinek köszönjük a javítási munkát.

1. Írjuk fel a háromdimenziós tér $P = (1, 1, 1)$ és $Q = (3, 1, 5)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az y tengelyt?

   Megoldás:

   A sík felírható, ha ismerjük a normálvektorát és egy pontját. (1 pont)

   Mivel a felezőmerőleges sík merőleges a két megadott pontot összekötő szakaszra, a normálvektor e szakasszal párhuzamos. (1 pont)

   Normálvektornak jó lesz tehát az $\mathbf{n} = (3 - 1, 1 - 1, 5 - 1) = (2, 0, 4)$ vektor. (1 pont)

   Vagyis a sík egyenlete $2x + 0y + 4z = c$ alakú, ahol c még kiszámítandó. (1 pont)

   A PQ szakasz felezőpontjának koordinátái $(2, 1, 3)$, ez a pont tehát rajta van a kért síkon. (1 pont)

   Koordinátáit a sík egyenletébe beírva $2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = c$, vagyis $c = 16$ adódik. (1 pont)

   Vagyis a kérdéses síkegyenlet: $2x + 4z = 16$, avagy az ezzel ekvivalens $x + 2z = 8$. (1 pont)

   Az y tengely, mint egyenes egyenletrendszere $x = 0$, $y = 0$. (1 pont)

   A keresett metszéspont koordinátáira tehát teljesülnie kell az $x = 0$, $y = 0$, $x + 2z = 8$ egyenleteknek. (1 pont)

   Mivel ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, a sík nem metszi az y tengelyt. (1 pont)

2. Legyen U tetszőleges vektortér, V és W pedig U alterei. Mutassuk meg, hogy ekkor $V \cap W$ is altere U-nak.

   Megoldás:

   Az előadáson tanult tétel szerint azt kell megmutatni, hogy ha $a, b \in V \cap W$, λ pedig valós szám, akkor λa és $a + b$ is elemei $V \cap W$-nek. (3 pont)

   Mivel V altere U-nak $a, b \in V$-ből következik, hogy λa és $a + b$ is eleme V-nek. (4 pont)

   Mivel ugyanez W-ről is elmondható, adódik, hogy ha a és b a metszetben van, akkor ott lesz λa és $a + b$ is, amint bizonyítani kellett. (3 pont)

3. Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $a, b, c, d \in R^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } d = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

A 4 vektor akkor lesz független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, (1 pont)

vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 1 & 1 & p & 1 & 0 \\ 1 & p & 1 & 1 & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (1 pont)

A Gauss-elimináció során az első lépések után az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 1-p & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p^2 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (1 pont)

A 2. és 3. sort megcseréljük, majd két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $p = 1$ vagy sem.

Ha $p = 1$, akkor az utolsó három sort törölni kell, így nyilván nem lesz egyértelmű megoldás, a vektorok ekkor tehát nem függetlenek. (1 pont)

Ha $p \neq 1$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p^2+2(1-p) & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (2 pont)

Ennek akkor és csak akkor lesz egyértelmű megoldása, ha $1 - p^2 + 2(1-p) \neq 0$, hiszen ekkor jön létre a 4. oszlopban is vezéregyes. (2 pont)

Mivel $1 - p^2 + 2(1-p) = (1-p)(1+p+2)$ és $p \neq 1$, ez $p \neq -3$ esetén teljesül. (1 pont)

A vektorok tehát a $p = 1$ és $p = -3$ esetekben nem függetlenek, p minden más értékére igen. (1 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c és d paraméterek minden értékére.

$$\begin{aligned} x + 2z &= 5 \\ 2x - y &= 8 \\ 3x + 6y + cz &= d \end{aligned}$$

Megoldás:

Gauss elimináció során az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c-30 & d-27 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. (2 pont)

Ha $c = 30, d \neq 27$, akkor az utolsó sor tilos sor, így nincs megoldás. (2 pont)

Ha $c = 30, d = 27$, akkor az utolsó, csupa 0 sort törölve meg is kapjuk az RLA-t, ahonnan a megoldás $x = 5 - 2p, y = 2 - 4p, z = p$, ahol p tetszőleges valós szám. (3 pont)

Ha $c \neq 30$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-2\frac{d-27}{c-30} \\ 0 & 1 & 0 & 2-4\frac{d-27}{c-30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{d-27}{c-30} \end{array}\right)$$

RLA-t kapjuk, (2 pont)

ahonnan a megoldás $x = 5 - 2\frac{d-27}{c-30}$, $y = 2 - 4\frac{d-27}{c-30}$, $z = \frac{d-27}{c-30}$. (1 pont)

5. Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor legfeljebb 20 nullától különböző szorzatot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor a mátrix legalább 5 nullát tartalmaz.

Megoldás:

Egy mátrixelem a determináns definíció szerinti felírásakor összesen $4! = 24$ szorzatban jelenik meg szorzótényezőként, egy 0 tehát 24 szorzatot tud "kinullázni". (4 pont)

Összesen $5! = 120$ szorzat van. (1 pont)

Ha legfeljebb 20 lesz nemnulla, akkor legalább 100 lesz 0. (0 pont)

Ha legfeljebb négy 0 lenne a mátrixban, akkor legfeljebb $4 \cdot 24 = 96$ szorzat lehetne 0, hiszen minden 0 szorzat valamelyik tényezőjének 0-nak kell lennie. (4 pont)

A 100 nullává váló szorzathoz tehát nem elég 4 nulla, legalább 5-re van szükség. (1 pont)

(5 egyébként persze elég is, ha egy sor minden eleme 0.)

6. Léteznek-e olyan 2×3-as A és 3×2-es B mátrixok, melyek egyike semáll csupa 0-ból, de az AB és a BA szorzatmátrixok mindketten csupa 0-bólállnak?

Megoldás:

Igen, vannak ilyenek, ennek bizonyításához elég egy példát mutatni. (2 pont)

Jó lesz például az, ha A bal felső és B jobb alsó eleme 1, az összes többi elem pedig 0. (8 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. november 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre AB a 2×2-es egységmátrix.

* * * * *

Első megoldás. A rangfogalmak egyenlősége miatt (determinánsrang) létezik A-nak olyan 2×2-es C részmátrixa, melynek determinánsa nem 0. (1 pont)
Álljon ez A i. és j. oszlopaiból ($1 \leq i < j \leq 3$). (1 pont)
Mivel C determinánsa nem 0, a tanult tétel szerint létezik inverze. (2 pont)
Legyen most B az a mátrix, melynek az i. sora a C^{-1} mátrix első sorával azonos, j. sora a C^{-1} mátrix második sorával azonos, (3 pont)
az i.-től és j.-től különböző sora pedig csupa (két darab) 0. (1 pont)
A mátrixszorzás és az inverz tulajdonságai alapján látható, hogy az AB szorzat ekkor csakugyan a 2×2-es egységmátrix, a keresett B mátrix tehát valóban létezik. (2 pont)

Második megoldás. Ismert, hogy az AB szorzat i. oszlopa Ab_i, ahol b_i a B mátrix i. oszlopa. (1 pont)
Szintén ismert, hogy az A mátrix és az x oszlopvektor szorzata nem más, mint A oszlopainak az x koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja. (2 pont)
A rangfogalmak egyenlősége miatt (oszloprang) létezik A-nak két független oszlopa. (1 pont)
A oszlopai tehát a két koordinátás (kettő magas) oszlopvektorok terében generátorrendszert alkotnak, (2 pont)
tehát bármely két koordinátás oszlopvektor előáll e vektorok alkalmas lineáris kombinációjaként. (1 pont)
Így speciálisan a 2×2-es egységmátrix oszlopai is előállnak így, (2 pont)
amiből a fentiek szerint a kívánt B mátrix létezése következik. (1 pont)

Harmadik megoldás. Egy adott A mátrixhoz a kívánt B-t megpróbáljuk elemenként előállítani. Ez az $A|v_1$ és $A|v_2$ egyenletrendszerek megoldását jelenti, ahol v_i a 2×2-es egységmátrix i. oszlopa, a megoldásokból pedig (ha vannak) összerakhatjuk B-t: az első rendszer megoldásai (sorrendben) adják B első oszlopát, a második rendszer megoldásai pedig B második oszlopát. (3 pont)
A rangfogalmak egyenlősége miatt (sorrang) A sorai függetlenek, (1 pont)
az egyenletrendszerek Gauss-eliminációval történő megoldása során tehát a bal oldalon nem keletkezhet csupa 0 sor, (2 pont)
így nem kapunk tilos sort sem, (2 pont)
azaz mindkét egyenletrendszernek lesz megoldása, (1 pont)
ahonnan a keresett B mátrix létezése a fentiek szerint következik. (1 pont)

2. Legyen $n \geq 10$ egész szám. Az A $n \times n$-es mátrix rangja 10, a B $n \times n$-es mátrix rangja n. Határozzuk meg AB rangját.

* * * * *

Ismert, hogy egy mátrix rangja az oszlopai (mint vektorok) által generált altér dimenziója. (1 pont)
Tudjuk továbbá, hogy az AB szorzat i. oszlopa Ab_i, ahol b_i a B mátrix i. oszlopa, (1 pont)
és hogy az A mátrix és az x oszlopvektor szorzata nem más, mint A oszlopainak az x koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja. (1 pont)
Az AB mátrix oszlopai tehát mind A oszlopainak lineáris kombinációi, (1 pont)
vagyis az AB oszlopai által generált altér része az A oszlopai által generált altérnek, (1 pont)
így $r(AB) \leq r(A) = 10$. (1 pont)
Mivel B rangja n, a rangfogalmak egyenlősége miatt (determinánsrang) B determinánsa nem 0, (1 pont)
azaz B invertálható. (1 pont)
Mivel $A = (AB)B^{-1}$ (itt felhasználtuk, hogy a mátrixszorzás asszociatív, de ezt nem muszáj megemlíteni), (1 pont)
a fenti gondolatmenet alapján $r(A) = r((AB)B^{-1}) \leq r(AB) \leq r(A) = 10$ is teljesül, ahonnan $r(AB) = 10$. (1 pont)

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az $(1,0)$ vektorhoz a $(0,1)$ vektort, a $(0,1)$ vektorhoz a $(2,1)$ vektort, a $(2,1)$ vektorhoz pedig az $(1,0)$ vektort rendeli?

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a kérdéses transzformációt $\mathcal{A}$-val. Ha $\mathcal{A}$ lineáris leképezés, akkor az ezeket definiáló feltételek miatt $\mathcal{A}((2,1)) = \mathcal{A}((2,0)) + \mathcal{A}((0,1)) =$ (4 pont)
$= 2\mathcal{A}((1,0)) + \mathcal{A}((0,1))$, (3 pont)
azaz $\mathcal{A}((2,1)) = 2(0,1) + (2,1) = (2,3)$, (2 pont)
ami lehetetlen (hiszen $\mathcal{A}((2,1)) = (1,0)$ kéne hogy legyen), tehát $\mathcal{A}$ nem lineáris leképezés. (1 pont)

Második megoldás. Ha az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képeivel megadott transzformáció lineáris, akkor a tanult módon felírhatjuk a mátrixát valamely bázisban. (3 pont)
Ha ravaszul a szokásos bázist választjuk, akkor a mátrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 pont)
Ezzel a mátrix-szal megszorozzuk a $(2,1)$ vektor koordinátavektorát, ami most épp saját maga, (2 pont)
ennek eredménye a $(2,3)$ vektor, (1 pont)
ez viszont láthatóan nem az $(1,0)$ koordinátavektora, vagyis a transzformáció nem lineáris. (1 pont)
Ez azért persze olyan nagyon nem különbözik az első megoldástól.

4. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$, ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

* * * * *

Első megoldás. Mivel minden vektor előáll a (szokásos) bázis vektorainak lineáris kombinációjaként, a képtér a bázisvektorok képei által generált altér lesz. (2 pont)
A bázisvektorok képei épp a mátrix oszlopai, vagyis az $(1, 2)$ és $(2, x)$ vektorok. (1 pont)
Ha $x \neq 4$, akkor ezek nyilván generálják a síkot, vagyis ekkor a képtér az egész sík. (2 pont)
A dimenziótételt alkalmazva a magtér dimenziója ekkor 0, vagyis a magtér csak az origóból áll. (2 pont)
Ha $x = 4$, akkor a képtér a megoldás elején tett megállapítás szerint az $(1, 2)$ vektor számszorosaiból áll, (1 pont)
a magtér meghatározásához pedig az $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldani. (1 pont)
A megoldások azok az (x, y) vektorok, amikre teljesül, hogy $x + 2y = 0$ (vagy más szóval a $(-2, 1)$ vektor számszorosai). (1 pont)

Második megoldás. Keressük meg először a magteret. Ehhez a definíció szerint az $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert kell megoldani. (2 pont)
A Gauss-elimináció első lépése után az egyenletrendszer $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x-4 & 0 \end{array}\right)$. (1 pont)
Ha $x = 4$, akkor az utolsó, csupa 0 sort törölve megkapjuk a redukált lépcsős alakot, abból pedig a megoldást, miszerint azon (x, y) vektorok alkotják a magteret, melyekre $x + 2y = 0$. (1 pont)
Ha $x \neq 4$, akkor az utolsó sort $(x - 4)$-gyel osztva majd a második sor kétszeresét az elsőből levonva kapjuk a redukált lépcsős alakot, abból pedig az $x = 0$, $y = 0$ megoldást, azaz ekkor csak az origóból áll a magtér. (1 pont)
A képteret a második esetben egyszerűbb meghatározni: a dimenziótétel szerint két dimenziós kell legyen, így nem lehet más, mint a teljes sík. (2 pont)
Az első esetben sokféleképp eljárhatunk, megszorozhatjuk például az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot egy tetszőleges (x, y) vektorral, az eredmény az $(x + 2y, 2x + 4y)$ vektor. (1 pont)
Az ilyen alakú vektorok alkotják a képteret, vagyis azok, ahol a második koordináta az első kétszerese (ennek nyilván kell teljesülnie, ezek közül pedig mindenki előáll ilyen alakban). (2 pont)

5. A sík egy lineáris transzformációja a $(2, 1)$ vektorhoz az $(1, 1)$ vektort rendeli, az $(1, 1)$ vektorhoz pedig a $(2, 1)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció egy sajátvektorát és a hozzá tartozó sajátértéket.

* * * * *

Első megoldás. Jelöljük a lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-val. Az összeadásra vonatkozó tulajdonság miatt
$\mathcal{A}((2, 1) + (1, 1)) = \mathcal{A}((2, 1)) + \mathcal{A}((1, 1)) = (1, 1) + (2, 1)$, (4 pont)
vagyis a $(2, 1) + (1, 1) = (3, 2)$ vektort $\mathcal{A}$ saját magába viszi. (2 pont)
A definíció szerint tehát $(3, 2)$ a transzformáció egy sajátvektora, (2 pont)
a hozzá tartozó sajátérték pedig 1. (2 pont)

Második megoldás. Jelöljük a lineáris transzformációt most is $\mathcal{A}$-val. Szeretnénk felírni $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban, ehhez szükségünk van az $(1, 0)$ és a $(0, 1)$ vektorok képére. (1 pont)
$\mathcal{A}((1, 0)) = \mathcal{A}((2, 1) - (1, 1)) = \mathcal{A}((2, 1)) - \mathcal{A}((1, 1)) = (1, 1) - (2, 1) = (-1, 0)$. (2 pont)
Itt akár meg is állhatunk, hiszen láthatóan az $(1, 0)$ sajátvektor -1 sajátértékkel, ha ez történik, akkor az első megoldásnál látottak szerint pontozzunk. Ha ehelyett inkább továbbmegyünk:
$\mathcal{A}((0, 1)) = \mathcal{A}((1, 1) - (1, 0)) = \mathcal{A}((1, 1)) - \mathcal{A}((1, 0)) = (2, 1) - (-1, 0) = (3, 1)$. (2 pont)
A keresett mátrix innen $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
A sajátértékek a karakterisztikus polinom, azaz $(-1 - \lambda)(1 - \lambda)$ gyökei, (1 pont)
vagyis 1 és -1. Az 1-hez tartozó sajátvektorok a nem túlzottan bonyolult $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszer megoldásaiként adódnak, (2 pont)

ilyen pl. a $(3,2)$ vektor. (1 pont)

6. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós és a képzetes része is pozitív.

$$(-5\sqrt{2}+\sqrt{2}i)z^5 = 12+8i$$

* * * * *

Osztás után az egyenlet a $z^5 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ alakot ölti. (2 pont)
$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ hossza 2, (1 pont)
az x tengellyel bezárt szöge pedig $225°$, (1 pont)
trigonometrikus alakja tehát $2\cdot(\cos 225° + i\sin 225°)$. (1 pont)
Így az ötödik gyökeinek hossza $\sqrt[5]{2}$, (1 pont)
az ötödik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig $45°, 117°, 189°, 261°, 333°$. (2 pont)
Ezek közül egyedül a $45°$ szögű gyöknek pozitív a valós és a képzetes része is, (1 pont)
ennek trigonometrikus alakja $\sqrt[5]{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$, algebrai alakja tehát $2^{-0{,}3}+2^{-0{,}3}i$ (ezt persze másképp is meg lehet adni). (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, első pótzh — pontozási útmutató
2013. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Mely a valós számokra teljesül, hogy az $ax + 2y + 3z = 4$ egyenletű síknak és az $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$ egyenletrendszerű egyenesnek nincsen közös pontja?

* * * * *

Első megoldás. Ahhoz, hogy a síknak és az egyenesnek ne legyen közös pontja, pontosan az szükséges, hogy párhuzamosak legyenek, de az egyenes ne legyen teljes egészében a síkban. (2 pont)
A párhuzamosság pontosan akkor teljesül, ha az egyenes (egyik) irányvektora merőleges a sík (egyik) normálvektorára. (2 pont)
Az egyenes irányvektora $(2, 3, 4)$, a sík normálvektora $(a, 2, 3)$. (2 pont)
Ezek akkor merőlegesek, ha a skalárszorzatuk nulla, (1 pont)
azaz $2a + 6 + 12 = 0$, ahonnan $a = -9$. (1 pont)
Hátra van annak az ellenőrzése, hogy ekkor az egyenes benne fekszik-e a síkban. Mivel könnyen látható, hogy (például) az origó az egyenesen rajta van, a síkon viszont nem, $a = -9$ esetén a feltétel valóban teljesül (máskor pedig nem). (2 pont)

Második megoldás. Ahhoz, hogy a síknak és az egyenesnek ne legyen közös pontja, pontosan az szükséges, hogy a sík egyenletéből és az egyenes egyenletrendszeréből kapott, három egyenletből álló rendszernek ne legyen megoldása. (2 pont)
Az egyenes egyenleteiből $x = \frac{z}{2}, y = \frac{3z}{4}$. (3 pont)
Ezt a sík egyenletébe beírva $\frac{az}{2} + \frac{3z}{2} + 3z = 4$, (1 pont)
azaz $\left(\frac{9}{2} + \frac{a}{2}\right) z = 4$. (1 pont)
Ennek pontosan akkor nincs megoldása, ha $\left(\frac{9}{2} + \frac{a}{2}\right) = 0$, azaz ha $a = -9$. (3 pont)

2. Legyenek U és W a V vektortér alterei. Bizonyítsuk be, hogy $U \cup W$ akkor és csak akkor altere V-nek, ha vagy $U \subseteq W$, vagy $W \subseteq U$ fennáll.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$U \subseteq W$ esetén $U \cup W = W$, $W \subseteq U$ esetén $U \cup W = U$, az $U \cup W$ mindkét esetben nyilván altér lesz. (1 pont)

A másik irány bizonyításához tegyük fel indirekten, hogy $U \cup W$ altere V-nek, de $U \subsetneq W$ és $W \subsetneq U$. (0 pont)

Ekkor léteznek olyan u és w vektorok, melyekre $u \in U \setminus W$ és $w \in W \setminus U$. (2 pont)

Mivel mindkét vektor benne van $U \cup W$-ben és $U \cup W$ altér, az alterek összeadásra való zártsága miatt $u + w \in U \cup W$. (2 pont)

Így $u + w \in U$ vagy $u + w \in W$. (1 pont)

Az U altér skalárral szorzásra való zártsága miatt $-1 \cdot u = -u \in U$. (1 pont)

Ha tehát $u+w \in U$, akkor az U altér összeadásra való zártsága miatt $(u+w)+(-u) = w \in U$, (1 pont)

ami ellentmond w választásának. (1 pont)

Természetesen ugyanígy kapunk ellentmondást $u + w \in W$ esetén. (1 pont)

3. Független rendszert alkotnak-e az

a) $(1, 1, 1, 3), (1, 1, 3, 1)(1, 3, 1, 1), (3, 1, 1, 1)$ vektorok?

b) $(1, 1, 1, -3), (1, 1, -3, 1)(1, -3, 1, 1), (-3, 1, 1, 1)$ vektorok?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) A vektorok pontosan akkor lesznek függetlenek, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (2 pont)

Az egyenletrendszer Gauss-eliminációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

alakra hozható, (2 pont)

azaz a megoldás egyértelmű, a vektorok függetlenek. (1 pont)

b) Eljárhatunk az a) esethez hasonlóan, de egyszerűbb, ha észrevesszük, hogy a négy vektor összege a csupa nulla vektor, tehát ezek a vektorok nem alkotnak független rendszert, (3 pont)

hiszen van olyan nem triviális lineáris kombinációjuk, ami a nullvektort adja. (2 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} 3x + 5y + z &= 4 \\ 2x + y + cz &= c \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az első és a harmadik, majd a második és a harmadik egyenlet cseréje után Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & c-3 & c+9 \end{array}\right)$ alakra hozható. (3 pont)

Ha $c \neq 3$, akkor a harmadik sort $(c - 3)$-mal osztva (1 pont)

és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7-2\frac{c+9}{c-3} \\ 0 & 1 & 0 & 5+\frac{c+9}{c-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c+9}{c-3} \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk, (3 pont)
ahonnan a megoldás: $x = -7 - 2\frac{c+9}{c-3}$, $y = 5 + \frac{c+9}{c-3}$, $z = \frac{c+9}{c-3}$. (1 pont)
Ha $c = 3$, akkor az alsó sor tilos sor lesz, így ekkor nincs megoldása az egyenletrendszernek. (2 pont)

5. Egy négyzetes mátrixot nevezzünk kellemesnek, ha determinánsának definíció szerinti kiszámításakor pontosan 1 nullától különböző szorzatot kapunk.

a) Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$–es mátrix kellemes, akkor legalább $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén létezik $n \times n$–es kellemes mátrix, ami pontosan $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

* * * * *

a) Könnyen látható, hogy sorok cseréje nem befolyásolja egy mátrix kellemes voltát, (2 pont)
feltehető tehát, hogy az egyetlen nem nulla szorzat a főátlóbeli elemekhez tartozik. (1 pont)
Az (i, j), illetve (j, i) pozícióban lévő elemek valamelyikének tetszőleges $i \neq j$ esetén nullának kell lennie, (1 pont)
ellenkező esetben az i. sorból a j. elemet, a j. sorból az i. elemet, a többi sorból pedig a főátlóbeli elemet választva nem nulla szorzatot kapnánk. (3 pont)
Mivel a különböző ilyen (i, j) párok száma $\frac{n^2-n}{2}$ és a hozzájuk tartozó elemek között nincs két azonos, csakugyan szükséges, hogy a mátrix legalább $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmazzon. (1 pont)

b) Egy olyan felső háromszögmátrix, melyben a főátló és minden (nem feltétlen közvetlenül) a főátló fölött lévő elem nullától különböző, nyilván jó lesz. (2 pont)

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hány olyan 2×2–es B mátrix létezik, melyre $AB = A$?

* * * * *

Ha $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, akkor a mátrixszorzás definíciója szerint a megadott feltétel az $a + c = 1, 2a + 2c = 2, b + d = 1, 2b + 2d = 2$ alakot ölti. (5 pont)
A második, illetve a negyedik egyenlet az elsőből, illetve a harmadikból következik, tehát az $a + c = 1, b + d = 1$ egyenletrendszer megoldásainak számára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
Mivel tetszőleges a-hoz tartozik alkalmas c és tetszőleges b-hez tartozik alkalmas d, (3 pont)
a megoldások száma nyilván végtelen sok. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, második pótzh — pontozási útmutató
2013. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre a BA mátrix a 3×3-as egységmátrix.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy létezik ilyen B mátrix. Ekkor a tanultak szerint BA oszlopai a B oszlopainak lineáris kombinációiként állnak elő. (2 pont)
BA oszlopai tehát benne vannak a B oszlopai által generált altérben, (1 pont)
ami legfeljebb két dimenziós, hiszen B-nek csak két oszlopa van. (2 pont)
Mivel két dimenziós térben legfeljebb két vektor lehet független, (2 pont)
BA-nak legfeljebb 2 a rangja. (1 pont)
A 3×3-as egységmátrix rangja viszont 3, ezért nem lehet azonos a BA mátrixszal. (2 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az x valós szám függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A rangot Gauss-eliminációval határozzuk meg. Az első sort a másodikból és a harmadikból levonva az alábbi mátrixot kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-2x^2 & 1-2x \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $x = 1$, akkor a második és a harmadik sor cseréje után gyorsan kiderül, hogy a redukált lépcsős alakban két vezéregyes lesz, (2 pont)
vagyis a mátrix rangja 2. (1 pont)
Ha $x \neq 1$, akkor a második oszlopot $(1-x)$-szel osztva, (1 pont)
majd a második sor $(1-2x^2)$-szeresét a harmadikból levonva az alábbi mátrixot kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2x \end{pmatrix}.$$ (2 pont)

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a redukált lépcsős alakban két vezéregyes lesz, (1 pont)
vagyis a mátrix rangja 2. (1 pont)
Ha $x \neq \frac{1}{2}$, akkor a harmadik oszlopot $(1-2x)$-szel osztva megkapjuk a harmadik vezéregyest, azaz a mátrix rangja ekkor 3. (1 pont)

Ha a Gauss-elimináció előtt kicseréljük az első és a második sort (meg esetleg az első és a harmadik oszlopot), akkor a számolás egyszerűbb lesz. Mivel azonban ezek a lépések nem tartoznak a Gauss-eliminációhoz, meg kell említeni, hogy nem változtatják meg a rangot. Ennek hiányában sorcsere esetén 1, oszlopcsere esetén 2 pontot vonjunk le.

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely a $(0,1)$ vektorhoz és az $(1,0)$ vektorhoz is az $(1,1)$ vektort rendeli?

* * * * *

Ha van ilyen lineáris transzformáció (nevezzük $\mathcal{A}$-nak), akkor $\mathcal{A}((x,y)) = \mathcal{A}((x,0)) + \mathcal{A}((0,y)) = x\mathcal{A}((1,0)) + y\mathcal{A}((0,1)) = (x+y, x+y)$. (3 pont)
Másrészt az a transzformáció, ami az (x,y) vektort az $(x+y, x+y)$ vektorba viszi, a $(0,1)$ vektorhoz és az $(1,0)$ vektorhoz is az $(1,1)$ vektort rendeli, (1 pont)
tehát azt kell eldöntenünk, hogy az (x,y) vektort az $(x+y, x+y)$ vektorba vivő transzformáció lineáris-e. (2 pont)
Erről a lineáris leképezéseket definiáló két tulajdonság ellenőrzésével könnyen meggyőződhetünk, mindkét tulajdonság igaz lesz. (2+2 pont)

4. Az A mátrixnak k sora és 2^k oszlopa van. Az oszlopok (valamilyen sorrendben) éppen az összes különböző k hosszúságú 0-1 sorozatok. Hány dimenziós annak az $\mathbb{R}^{2^k}$-ból $\mathbb{R}^k$-ba menő lineáris leképezésnek a magtere, melynek mátrixa a szokásos bázisban A?

* * * * *

Először a képtér dimenzióját számítjuk ki. Mivel a leképezés az $\mathbb{R}^k$-ba megy, a képtér legfeljebb k dimenziós lehet. (1 pont)
Az A mátrix definíciójából látszik, hogy $\mathbb{R}^k$ szokásos bázisának valamennyi vektora előáll képként, (3 pont)
így $\mathbb{R}^k$ minden vektora előáll képként, (2 pont)
tehát a képtér dimenziója pontosan k. (1 pont)
A magtér dimenziója innen a dimenziótétel felhasználásával $2^k - k$. (3 pont)

5. Legyenek u és v egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $u+v$ is sajátvektora ugyanannak a transzformációnak?

* * * * *

Az u és v vektorok tartozzanak rendre a λ és μ sajátértékekhez, ahol a feladat szerint $\lambda \neq \mu$. A lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-val jelölve $\mathcal{A}(u+v) = \lambda u + \mu v$. (2 pont)
Ha $u+v$ sajátvektor a γ sajátértékkel, akkor tehát $\lambda u + \mu v = \mathcal{A}(u+v) = \gamma(u+v)$, (2 pont)
ahonnan $(\lambda - \gamma)u = (\gamma - \mu)v$, (2 pont)
vagyis az u és v vektorok egymás számszorosai (mivel egyik sem nullvektor, továbbá $\lambda = \gamma$ és $\mu = \gamma$ egyidejűleg nem teljesülhet), (2 pont)
ekkor azonban ugyanaz a sajátérték kéne, hogy hozzájuk tartozzon, ami ellentmondás. (2 pont)

6. Határozzuk meg a $(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i)^3$ komplex szám hosszának (abszolút értékének) egész részét.

* * * * *

A tanultak szerint egy komplex szám k. hatványának hossza azonos a komplex szám hosszának k. hatványával, így elég a szám hosszát meghatározni, majd köbre emelni. (4 pont)

A hossz négyzete $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 3$. (2 pont)

A szám hossza tehát $\sqrt{3}$, (1 pont)

köbének hossza pedig így $3\sqrt{3}$. (1 pont)

Az egész rész meghatározásához vegyük észre, hogy $(3\sqrt{3})^2 = 27$, ami 5 és 6 négyzete közé esik, (1 pont)

tehát a kérdéses egész rész 5. (1 pont)

Természetesen a feladat megoldható az első észrevétel nélkül, de lényegesen több számolással. Minden számolási hibáért vonjunk le 1 pontot.