Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2012. október 18.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\dfrac{x-9}{3} = y+4 = \dfrac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel!

2. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben!

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 3\\
&2x_1 + 11x_2 + 12x_4 - 3x_5 = 11\\
&4x_1 + 9x_2 + 26x_3 - 2x_4 + p \cdot x_5 = 9\\
&3x_1 + 13x_2 + 7x_3 + 11x_4 + q \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*! (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét!)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2012. november 22.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n \times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze!

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

2. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

3. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

4. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x+y; x+z; x+2y+2z)$ vektort rendeli.

a) Igaz-e, hogy az $(1;2;5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?

(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is pozitív!

a) $(7-i) \cdot z = 19 + 33i$

b) $\sqrt{2} \cdot z^5 = -100000 - 100000i$

6. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 3 világos és 4 sötét gyalogot?
(A sakktábla 8×8-as. Egy mezőre természetesen nem lehet egynél több bábut tenni; ettől eltekintve a bábuk elhelyezésénél a sakk szabályaira nem kell tekintettel lenni. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan mező, amin az egyik esetben nem áll bábu, a másikban igen, vagy van olyan mező, amin nem azonos színű bábuk állnak a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2012. december 3.

1. Egy síkra esnek-e a térben az $A(1;5;3)$, $B(7;11;-5)$, $C(10;14;-9)$ és $D(12;6;-15)$ pontok?

2. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik elem a fölötte álló két elem átlaga. Így például a jobbra látható vektor W-beli. Határozzuk meg $\dim W$ értékét! (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \\ 7 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra!

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p+4 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Az $n \times n$-es A mátrix első oszlopának minden eleme 1. A mátrix minden, nem az első sorban és nem az első oszlopban álló eleme a tőle balra és a felette található két elem összege. (Képletben: $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ minden $2 \leq i, j \leq n$ esetén.) Mutassuk meg, hogy $\det A = 1$.

6. A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{2012} mátrixot (vagyis annak a 2012 tagú szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2012. december 3.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Nevezzük egy számsorozatot *félig számtaninak*, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 9$ (ahol r-rel a rangot jelöltük).

3. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen B, illetve C két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[\mathcal{A}]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[\mathcal{A}]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor!

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív!

a) $\dfrac{22-21i}{z} = 3-4i$ b) $z^3 + 125i = 0$

6. Egy kisváros 20 fős önkormányzati képviselőtestülete három különböző feladatra választ egy-egy bizottságot (legyenek ezek A, B és C). Mindhárom bizottság 4 fős és bármely képviselő több bizottságban is lehet tag, de azt nem szeretnék, ha két bizottságnak teljesen azonos volna a tagsága. További cél, hogy a polgármester (aki egyike a 20 képviselőnek) pontosan egy bizottságban legyen tag a három közül (de az mindegy, hogy melyikben). Hányféleképpen választhatják meg a három bizottságot?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2012. december 11.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2;-3;4)$ ponton és tartalmazza az $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-7}$, $z=-5$ egyenletrendszerű egyenest!

2. Legyen V az $[1,10]$ intervallum, vagyis az 1-nél nagyobb-egyenlő és 10-nél kisebb-egyenlő valós számok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a minimumképzés és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén definiáljuk $\lambda \odot \underline{v}$ értékét úgy, hogy az $\underline{v}$-vel legyen egyenlő. (Így tehát például $\underline{2} \oplus \underline{5} = \underline{2}$, $\underline{3,14} \oplus \underline{3,14} = \underline{3,14}$ és $100 \odot \underline{9} = \underline{9}$.) Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

3. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ és a $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ vektorrendszerek egyaránt lineárisan függetlenek a (tetszőleges) V vektortérben. Mutassuk meg, hogy ha $k < n$, akkor létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}_i$ rendszer is lineárisan független!

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0\\
&2x_1 + 6x_2 - 10x_3 + x_4 - 10x_5 = 0\\
&4x_1 + 17x_2 + 13x_4 - 8x_5 = 15\\
&3x_1 + 11x_2 - 7x_3 + 12x_4 + (p^2+1) \cdot x_5 = p + 5
\end{aligned}$$

5. Az $n \times n$-es A mátrixra teljesül, hogy a főátlóban álló minden eleme 0 és bármely $1 \leq i < j \leq n$ esetén $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ (ahol $a_{i,j}$ a mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemét jelöli). Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor $\det A = 0$.

6. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1 és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód
Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2012. december 11.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1;2)$ vektorhoz és a $(3;4)$ vektorhoz egyaránt a $(\sqrt{5}, \sqrt{7})$ vektort rendeli. Igaz-e a $(6;6) \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ állítás?

3. A p valós paraméter minden értékére legyen $\mathcal{A}_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x+y+z; 4x+2y; y+p\cdot z)$ vektort rendeli.

a) A p milyen értékeire teljesül, hogy $(1;1;1)$ sajátvektora $\mathcal{A}_p$-nek?

b) A p milyen értékeire teljesül, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke $\mathcal{A}_p$-nek?

(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}_p$ valóban lineáris transzformáció.)

4. Jelölje a 2×2-es A mátrix főátlójában álló két elemnek az összegét t. Igazak-e az alábbi állítások (minden 2×2-es A mátrixra)?

a) Ha t sajátértéke A-nak, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor t sajátértéke A-nak.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része negatív és a képzetes része pozitív!

$$\frac{z^8}{\sqrt{3} - 5i} = 16 \cdot \frac{z^3}{\sqrt{3} + 2i}$$

6. Mikulás 20 ugyanolyan csokoládét oszt szét 5 gyerek között. Hányféleképpen teheti ezt meg?

(A csokoládék szétosztására semmilyen megkötés nincs; akár az is előfordulhat, hogy mind a 20-at ugyanannak az egy gyereknek adja. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan gyerek, aki nem ugyanannyi csokoládét kapott a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. október 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\dfrac{x-9}{3} = y+4 = \dfrac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel!

* * * * *

Jelölje a megadott egyenest e, a keresett síkot S, annak egy normálvektorát pedig $\underline{n}$.
e irányvektora $\underline{v}(3;1;5)$. (1 pont)
Mivel S párhuzamos e-vel, ezért $\underline{n}$ merőleges $\underline{v}$-re. (1 pont)
$\underline{n}$ ugyancsak merőleges a $\overrightarrow{PQ}$ vektorra (hiszen ez a két pont a síkban fekszik). (1 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (2;3;6)$ (ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a két pontba mutató helyvektorokat jelölik). (1 pont)
A fentiek miatt a $\overrightarrow{PQ} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat jó választás $\underline{n}$-re. (2 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{PQ} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (3\cdot 5 - 6\cdot 1)\underline{i} - (2\cdot 5 - 6\cdot 3)\underline{j} + (2\cdot 1 - 3\cdot 3)\underline{k} = (9;8;-7). \quad \text{(2 pont)}$$

A kapott normálvektor és P (vagy Q) segítségével a sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $9x + 8y - 7z = 5$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

2. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen a Fibonacci típusú, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok halmaza F és legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ és $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ két F-beli elem és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár.
Először megmutatjuk, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ szintén F-beli. Ugyanis $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $x_3 + y_3$, ahol $x_3 = x_1 + x_2$ és $y_3 = y_1 + y_2$ (mert $\underline{v}$ és $\underline{w}$ F-beliek). Így $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, vagyis valóban $\underline{v} + \underline{w}$ első két elemének összege. Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összegével egyenlő. (4 pont)
Most megmutatjuk, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ is F-beli. Ugyanis $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme $\lambda \cdot x_3 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, vagyis a $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme az első kettő összegével egyenlő. Ugyanígy indokolható, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összege. (4 pont)
A fentiekből következik, hogy F olyan nemüres részhalmaza $\mathbb{R}^5$-nek, amely zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, így a tanult tétel értelmében altér. (F valóban nemüres, hiszen például benne van a nullvektor vagy a feladatban megadott konkrét vektor.) (2 pont)

3. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben!

* * * * *

A feladat állítását az egyszerűség kedvéért $\underline{b}_1$-re mutatjuk meg (hiszen B elemeinek számozása tetszőleges). Legyen $W = \langle \underline{b}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_n \rangle$. Ekkor C-ben van W-hez nem tartozó elem, különben W-ben C n elemű lineárisan független rendszert, $B \setminus \{\underline{b}_1\}$ pedig $(n-1)$ elemű generátorrendszert alkotna szemben a tanult tétel állításával. Legyen tehát $C \setminus W = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k\}$ (C elemeinek számozása szintén tetszőleges). (1 pont)
Mivel C bázis, ezért (a tanultak miatt) $\underline{b}_1$ pontosan egyféleképp állítható elő C elemeiből lineáris kombinációval: $\underline{b}_1 = \gamma_1 \underline{c}_1 + \gamma_2 \underline{c}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ együtthatók között van nemnulla. Ellenkező esetben ugyanis $\underline{b}_1 = \gamma_{k+1} \underline{c}_{k+1} + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$ adódna, amiből $\underline{c}_{k+1}, \ldots, \underline{c}_n \in W$ miatt $\underline{b}_1 \in W$ is következne ellentmondásban a B lineáris függetlenségével. (2 pont)
Legyen tehát $\gamma_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$ tetszőleges. Állítjuk, hogy $\underline{c}_j$ megfelel a feladat állításának.
Először megmutatjuk, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ bázis V-ben. $\underline{c}_j \notin W$-ből az „újonnan érkező vektor" előadáson tanult lemmája miatt adódik, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ lineárisan független rendszer.(1 pont)
Ha $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ nem volna generátorrendszer, akkor létezne egy, az elemeiből lineáris kombinációval ki nem fejezhető $\underline{w}$ vektor. Ekkor azonban, ismét csak az „újonnan érkező vektor" lemmája miatt $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j, \underline{w}\}$ is lineárisan független volna, ami ellentmond annak, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer (bármelyik bázis). Így tehát $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ valóban bázis. (2 pont)
Most megmutatjuk, hogy $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis V-ben. $\underline{b}_1$ biztosan nem fejezhető ki $C \setminus \{\underline{c}_j\}$ elemeiből lineáris kombinációval, mert a $\underline{b}_1$ egyetlen, C elemeiből való kifejezésében a $\underline{c}_j$ együtthatója (nevezetesen γ_j) nem nulla. (2 pont)
Ha $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ nem volna generátorrendszer, akkor – a fentiekkel analóg módon – hozzávehető volna egy további vektor a lineáris függetlenség megtartásával, ellentmondásban azzal, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer. Így tehát $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis, az állítást beláttuk. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 3\\
&2x_1 + 11x_2 + 12x_4 - 3x_5 = 11\\
&4x_1 + 9x_2 + 26x_3 - 2x_4 + p \cdot x_5 = 9\\
&3x_1 + 13x_2 + 7x_3 + 11x_4 + q \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 2 & 11 & 0 & 12 & -3 & 11\\ 4 & 9 & 26 & -2 & p & 9\\ 3 & 13 & 7 & 11 & q & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 5 & -10 & 10 & 5 & 5\\ 0 & -3 & 6 & -6 & p+16 & -3\\ 0 & 4 & -8 & 8 & q+12 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+19 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+8 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $p = -19$ és $q = -8$, akkor az utolsó két sor csupa 0, így ezek elhagyhatók. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (egyetlen további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 11 & -5 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_5 = \gamma \in \mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1 = 7\gamma + 5\beta - 11\alpha$, $x_2 = 1 - \gamma - 2\beta + 2\alpha$. (2 pont)

Ha $p \neq -19$ vagy $q \neq -8$ (vagy mindkettő), akkor az eliminációt folytatva az alábbi alakot kapjuk. Valóban, ha például $p \neq -19$, akkor a harmadik sor $(p + 19)$-cel osztása, majd a negyedik sorból a harmadik $(q + 8)$-szorosának a kivonása és a kapott csupa nulla sor elhagyása után jutunk az alábbi alakhoz (és analóg a helyzet a $q \neq -8$ esetben is).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (3 darab) „kinullázásával" kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 11 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_1 = 5\beta - 11\alpha$, $x_2 = 1 + 2\alpha - 2\beta$, $x_5 = 0$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint*! (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét!)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi szorzat a determináns értékét nem befolyásolja. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik sorból csak a $\sqrt{5}$ választható. (1 pont)
Az első sorból 3 vagy 8 választható. Az előbbi esetben az ötödik sorból már csak a 2-est választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet), emiatt a második sorból csak 2-est, így a negyedikből csak a 4-est választhatjuk. Hasonlóan, ha az első sorból a 8-ast vesszük, akkor a negyedikből már csak a 2-est, a másodikból az 1-est és az ötödikből a 3-ast választhatjuk. (2 pont)
Így összesen csak két nemnulla szorzat keletkezik: $3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4 \cdot 2$ és $8 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot 3$. (1 pont)
A determináns értékének kiszámításához már csak az ehhez a két szorzathoz tartozó előjelet kell meghatározni. Az első szorzathoz tartozó permutáció $3, 1, 4, 5, 2$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (az inverzióban álló elempárok $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$ és $(5, 2)$). Mivel az inverziószám páros, a szorzat előjele $+$. (2 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció $5, 2, 4, 1, 3$, ennek az inverziószáma 7, az előjel $-$. (1 pont)
Amint látható, a két nemnulla szorzat abszolút értékben egyenlő (mindkettő $48 \cdot \sqrt{5}$), de az előjelük ellentétes, így a determináns értéke 0. (2 pont)

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) Az állítás igaz. Ugyanis $A^k = E$ miatt $\det(A^k) = 1$ adódik (mert $\det E = 1$). (1 pont)
A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det(A^k) = (\det A)^k$. (2 pont)
Így $(\det A)^k = 1$, amiből $\det A = \pm 1$ valóban igaz. (2 pont)

b) Az állítás hamis; ennek igazolására mutatunk egy ellenpéldát.
Legyen például $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Ekkor $\det A = 0,5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 1$, (1 pont)
de a mátrixszorzás definíciójából azonnal adódik, hogy $A^k = \begin{pmatrix} 0,5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ minden $k \geq 1$ egészre, vagyis $A^k = E$ semmilyen k-ra nem teljesül. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. november 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n \times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze!

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

* * * * *

a) Legyen A első oszlopának minden eleme α és jelölje az A^{-1} mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet $c_{i,j}$. Ekkor $\alpha \neq 0$, különben $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)

Mivel $A^{-1} \cdot A = E$ és az E első oszlopának minden eleme a legfelsőt kivéve 0, ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $c_{i,1} \cdot \alpha + c_{i,2} \cdot \alpha + \ldots + c_{i,n} \cdot \alpha = 0$ igaz minden $2 \leq i \leq n$ esetén. (2 pont)

Ebből α-val való osztás után éppen azt kapjuk, hogy A^{-1}-nek az i-edik sorában ($i \geq 2$ esetén) az elemek összege 0. Vagyis az állítás igaz. (1 pont)

b) Jelölje most $\underline{z}$ az A^{-1} első oszlopát. Ekkor $A \cdot A^{-1} = E$ miatt $A \cdot \underline{z}$ az egységmátrix első oszlopával egyenlő – jelölje ezt $\underline{e}_1$. (1 pont)

Jelölje az A első sorában álló elemek összegét β. Ekkor $\beta \neq 0$, különben az A minden sorában az elemek összege 0 volna, más szóval A oszlopainak az összege $\underline{0}$ volna, vagyis A oszlopai lineárisan összefüggők volnának. Így (a tanultak miatt) $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)

Legyen $\underline{y}$ az az oszlopvektor, amelynek minden eleme $1/\beta$. Ekkor az $A \cdot \underline{y}$ oszlopvektor i-edik eleme (a mátrixszorzás definíciója szerint) az A mátrix i-edik sorában álló elemek összegének $1/\beta$-szorosa. Vagyis $A \cdot \underline{y} = \underline{e}_1$. (2 pont)

Ezek szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszernek megoldása $\underline{x} = \underline{y}$ és $\underline{x} = \underline{z}$ is. Mivel azonban $\det A \neq 0$, ezért (a tanultak szerint) az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, vagyis $\underline{z} = \underline{y}$. Így $\underline{z}$ minden eleme azonos (épp $1/\beta$), ez az állítás is igaz. (2 pont)

2. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Először tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sort p-vel, az első sort 3-mal, a másodikat 5-tel osztva lépcsős alakú mátrixot kapunk, amelyben 4 vezéregyes van. (2 pont)
Így ilyenkor a mátrix rangja 4 (mert a Gauss-eliminációt a redukált lépcsős alakig folytatva a vezéregyesek száma már nem változna meg). (2 pont)
Tegyük most fel, hogy $p = 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sor csupa 0, elhagyásuk a rangot nem változtatja. (2 pont)
A maradék (és így az eredeti) mátrix rangja 2, mert az első sort ismét 3-mal, a másodikat 5-tel osztva két vezéregyessel bíró lépcsős alakot kapunk (és ez a redukált lépcsős alakban is így maradna).(2 pont)
Következésképp a mátrix rangja p semmilyen értékére sem lesz 3. (2 pont)

3. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1; 2)$ vektorhoz a $(0; 3; -3)$ vektort, a $(2; 1)$-hez a $(3; 3; 0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1; 2; 3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

* * * * *

Annak megállapításához, hogy $\mathcal{A}$ mit rendel egy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz, felírjuk (x, y)-t $(1; 2)$ és $(2; 1)$ lineáris kombinációjaként. Az $(x, y) = \alpha \cdot (1; 2) + \beta \cdot (2; 1)$ egyenletből $x = \alpha + 2\beta$ és $y = 2\alpha + \beta$ adódik, amiből (rövid számolás után) $\alpha = \frac{2y-x}{3}$ és $\beta = \frac{2x-y}{3}$ jön ki. (2 pont)
Ebből, felhasználva a lineáris leképezés definícióját:

$$\mathcal{A}\big((x, y)\big) = \mathcal{A}\left(\frac{2y - x}{3} \cdot (1; 2) + \frac{2x - y}{3} \cdot (2; 1)\right) = \frac{2y - x}{3} \cdot \mathcal{A}\big((1; 2)\big) + \frac{2x - y}{3} \cdot \mathcal{A}\big((2; 1)\big) =$$
$$= \frac{2y - x}{3} \cdot (0; 3; -3) + \frac{2x - y}{3} \cdot (3; 3; 0) = (2x - y; x + y; x - 2y). \qquad (3 \text{ pont})$$

Így $(1; 2; 3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ akkor igaz, ha van olyan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, amelyre $(2x-y; x+y; x-2y) = (1; 2; 3)$.(1 pont)
Azonban $2x - y = 1$ és $x + y = 2$ felhasználásával $x = 1$ és $y = 1$ adódik, de ezekre $x - 2y = 3$ nem teljesül. Így az állítás hamis. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldásához nincs feltétlen szükség $\mathcal{A}$ általános „képletének” felírására. Lehet úgy is érvelni, hogy mivel $(1; 2)$ és $(2; 1)$ bázist alkotnak a síkban, ezért minden $\underline{v}$ síkvektor felírható $\underline{v} = \alpha \cdot (1; 2) + \beta \cdot (2; 1)$ alakban. Ebből (hasonlóan a fentiekhez) $\mathcal{A}(\underline{v}) = \alpha \cdot \mathcal{A}\big((1; 2)\big) + \beta \cdot \mathcal{A}\big((2; 1)\big)$ adódik. Vagyis $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle (0; 3; -3), (3; 3; 0) \rangle$, így a feladat csak annak eldöntése, hogy $(1; 2; 3)$ ebben a generált altérben van-e.

4. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x + y; x + z; x + 2y + 2z)$ vektort rendeli.

a) Igaz-e, hogy az $(1; 2; 5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?
b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?

(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

* * * * *

a) A feladatbeli képletből $\mathcal{A}\big((1; 2; 5)\big) = (3; 6; 15)$ adódik. Vagyis $\mathcal{A}\big((1; 2; 5)\big) = 3 \cdot (1; 2; 5)$. (2 pont)
Ez definíció szerint épp azt jelenti, hogy $(1; 2; 5)$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak. (3 pont)

b) A fentiekből az is kiderül, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak: valóban, van olyan $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $\mathcal{A}(\underline{v}) = 3 \cdot \underline{v}$ (nevezetesen $\underline{v} = (1; 2; 5)$). (4 pont)
Így $\mathcal{A}$-nak van pozitív sajátértéke. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy további (és a feladat megoldásának szempontjából szükségtelen) munkával megkereshető $\mathcal{A}$ összes sajátértéke (például úgy, hogy $\mathcal{A}$ egy tetszőleges bázisban felírt mátrixának sajátértékeit keressük meg). Ebből kiderül, hogy $\mathcal{A}$-nak a 3-on kívül 1 és -1 is sajátértéke.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is pozitív!

a) $(7-i)\cdot z = 19+33i$ b) $\sqrt{2}\cdot z^5 = -100000-100000i$

* * * * *

a) $(7-i)$-vel osztva: $z = \dfrac{19+33i}{7-i} =$ (1 pont)

$= \dfrac{(19+33i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} =$ (1 pont)

$= \dfrac{100+250i}{50} = 2+5i$. A kapott megoldásnak pedig a valós és képzetes része (2 és 5) is pozitív.(2 pont)

b) $-100000-100000i = 10^5(-1-i) = 10^5\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$. (1 pont)
Ebből $z^5 = 10^5\,(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$. (1 pont)
z tehát $\sqrt[5]{10^5\,(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
Alkalmazva a tanult képletet: $z = 10\,(\cos(45^\circ + k\cdot 72^\circ) + i\sin(45^\circ + k\cdot 72^\circ))$ valamely $0 \le k \le 4$ értékre. (1 pont)
Ha a valós rész és a képzetes rész pozitív, akkor a szög 0° és 90° között van. Ez csak a $k=0$ esetben, a 45°-ra teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z = 10\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$. (1 pont)

6. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 3 világos és 4 sötét gyalogot?
(A sakktábla 8×8-as. Egy mezőre természetesen nem lehet egynél több bábut tenni; ettől eltekintve a bábuk elhelyezésénél a sakk szabályaira nem kell tekintettel lenni. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan mező, amin az egyik esetben nem áll bábu, a másikban igen, vagy van olyan mező, amin nem azonos színű bábuk állnak a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Először válasszuk ki a 64 mező közül azt a hármat, ahová világos gyalogok kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\dbinom{64}{3} =$ (1 pont)

$= \dfrac{64\cdot 63\cdot 62}{1\cdot 2\cdot 3}$. (2 pont)

Most a maradék 61 mező közül kell kiválasztani azt a 4-et, ahová sötét gyalogok kerülnek. A lehetőségek száma itt $\dbinom{61}{4} =$ (2 pont)

$= \dfrac{61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (2 pont)

Mivel az először mondott $\binom{64}{3}$ lehetőség mindegyike $\binom{61}{4}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért az összes lehetőségek száma $\dbinom{64}{3}\cdot\dbinom{61}{4} = \dfrac{64\cdot 63\cdot 62\cdot 61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy ha a megoldás során először a sötét, utána a világos gyalogok helyét választjuk meg, akkor az eredményt $\binom{64}{4}\cdot\binom{60}{3}$ alakban kapjuk meg (azonos gondolatmenettel); ez azonban számértékét tekintve azonos a fentivel. Egy harmadik megoldási lehetőség volna, ha először azt a 7 mezőt választjuk ki, ahová gyalogok kerülnek, majd a választott 7 mező közül (például) azt a 3-at, ahová a világosak. Ekkor $\binom{64}{7}\cdot\binom{7}{3}$ alakban jön ki ismét csak ugyanaz az eredmény.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. december 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Egy síkra esnek-e a térben az $A(1;5;3)$, $B(7;11;-5)$, $C(10;14;-9)$ és $D(12;6;-15)$ pontok?

* * * * *

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (10;14;-9) - (1;5;3) = (9;9;-12)$. (2 pont)
$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak (hiszen $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), vagyis A, B és C egy egyenesre esnek. (4 pont)
Ebből következik, hogy tetszőlegesen választott D pont esetén (így a feladatban megadottra is) A, B, C és D egy síkra esnek. (4 pont)

* * * * *

Második megoldás.
Felírjuk az A, B és D pontok által meghatározott sík egyenletét. Ennek normálvektora lesz minden, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokra egyaránt merőleges vektor. (1 pont)
Jó normálvektor lesz tehát például a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ vektoriális szorzat. (1 pont)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AD} = (12;6;-15) - (1;5;3) = (11;1;-18)$. (2 pont)
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$-t a tanult képlettel meghatározva:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 6 & -8 \\ 11 & 1 & -18 \end{vmatrix} = (6\cdot(-18) - 1\cdot(-8))\underline{i} - (6\cdot(-18) - 11\cdot(-8))\underline{j} + (6\cdot 1 - 6\cdot 11)\underline{k} = (-100;20;-60).$$

Ehelyett használhatjuk normálvektornak a (-20)-adrészét, az $\underline{n} = (5;-1;3)$ vektort. (2 pont)
A kapott normálvektor és (például) A segítségével az ABD sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x - y + 3z = 9$. (2 pont)
Ebbe a C pont koordinátáit helyettesítve az egyenlet teljesül, így C rajta van ezen a síkon, vagyis a négy pont egy síkra esik. (2 pont)

2. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik elem a fölötte álló két elem átlaga. Így például a jobbra látható vektor W-beli. Határozzuk meg $\dim W$ értékét! (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \\ 7 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen $\underline{w} \in W$ egy tetszőleges elem, amelynek a felső két eleme α és β. Ekkor W definíciójából $\underline{w}$ felírható:
$\underline{w} = (\alpha, \beta, \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta, \frac{3}{8}\alpha + \frac{5}{8}\beta)^T$. (1 pont)
Ebből $\underline{w} = \alpha \cdot (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})^T + \beta \cdot (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8})^T$. (2 pont)
Ezért az $\underline{u} = (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})^T$ és a $\underline{v} = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8})^T$ vektorok generátorrendszert alkotnak W-ben. (3 pont)
$\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan függetlenek is, mert nem többszörösei egymásnak. (2 pont)
Így a fenti két vektort bázist alkot W-ben, (1 pont)
amiből $\dim W = 2$. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldásához valójában nincs szükség a fenti számolásokra. Ha $\underline{u}$ jelöli a W (egyetlen) $(1, 0, \ldots)^T$ kezdetű, $\underline{v}$ pedig a $(0, 1, \ldots)^T$ kezdetű elemét, akkor $\underline{w} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ egyrészt W-beli elem (mert W altér), másrészt az első két eleme α, illetve β; így $\underline{w}$ azonos W (egyetlen) $(\alpha, \beta, \ldots)^T$ kezdetű elemével. Már ez is mutatja, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ generátorrendszert alkot.

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra!

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p+4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{e}$ teljesül. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ és $\underline{e}$ konkrét értékét, a $2\alpha + 4\beta + 10\gamma - 4\delta = 0$, $3\alpha + 4\beta + 9\gamma = -2$, $-\alpha + \gamma + p \cdot \delta = p + 4$ lineáris egyenletrendszerre jutunk. (1 pont)
Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 10 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & p & p+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & p-2 & p+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p+4 & p+2 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $p + 4 = 0$, akkor „tilos sor” keletkezik, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha viszont $p + 4 \neq 0$, akkor az utolsó sor $(p + 4)$-gyel osztása után kapjuk a Lépcsős Alakot. Ebben az esetben tehát az egyenletrendszernek lesz megoldása, mert a Redukált Lépcsős Alakig hátralévő lépések során „tilos sor” már nem keletkezhet. (3 pont)
Így az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p \neq -4$. (1 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determináns értékét a tanult módon, Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18$$

Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 5 pont levonást jelentenek. Ilyen elvi hiba például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns értékének megváltozását.

5. Az $n \times n$-es A mátrix első oszlopának minden eleme 1. A mátrix minden, nem az első sorban és nem az első oszlopban álló eleme a tőle balra és a felette található két elem összege. (Képletben: $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ minden $2 \leq i, j \leq n$ esetén.) Mutassuk meg, hogy $\det A = 1$.

* * * * *

Alulról fölfelé haladva az A minden sorából (az elsőt kivéve) vonjuk ki a fölötte állót; a kapott mátrix legyen A'. A tanultak szerint $\det A' = \det A$. (1 pont)

A' első oszlopában a legfelső 1-estől eltekintve minden elem 0. Így például a kifejtési tételből következik, hogy $\det A'$ megegyezik $\det B$-vel, ahol B az A' első sorának és első oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy B-re is fennállnak a feladatban A-ról mondott feltételek. Ebből már a mátrix sorainak és oszlopainak számára vonatkozó teljes indukcióval következni fog a feladat állítása: valóban, egyrészt $n = 1$ esetén nyilván igaz az állítás, másrészt $\det B = \det A$ miatt – ha B-re valóban teljesülnek a feltételek és így alkalmazható rá az indukciós feltevés – $\det A = 1$ is következik. (3 pont)

A második oszlopában az elemek fölülről lefelé haladva egyesével növekednek – ez következik az $a_{i,2} = a_{i-1,2} + a_{i,1}$ és az $a_{i,1} = 1$ feltételekből. Így az A'-t előállító lépések valóban csupa 1-est hoznak létre A' második oszlopában és így B első oszlopában is. (2 pont)

Válasszunk most ki A-ból 5 elemet, amelyek a következőképpen helyezkednek el egymáshoz képest: $\begin{pmatrix} & q \\ p & z \\ y & x \end{pmatrix}$. Ekkor a feladat feltételéből $z = p + q$ és $x = y + z$ következik. Ezeket egymásból kivonva: $x - z = (y - p) + (z - q)$. Ez az egyenlet pedig valóban mutatja, hogy B-re is fennáll a feladatbeli második feltétel, mert az A' mátrixban x helyén $x - z$, y helyén $y - p$ és z helyén $z - q$ áll. (3 pont)

6. A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{2012} mátrixot (vagyis annak a 2012 tagú szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint az A^2 mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme $50 \cdot \big(6 \cdot 6 + (-4) \cdot 9\big) = 0$. (3 pont)

Hasonlóan, az A^2 jobb felső, bal alsó, illetve jobb alsó sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme is $50 \cdot \big(6 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-6)\big) = 0$, $50 \cdot \big(9 \cdot 6 + (-6) \cdot 9\big) = 0$, illetve $50 \cdot \big(9 \cdot (-4) + (-6) \cdot (-6)\big) = 0$. (2 pont)

Így tehát $A^2 = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a 100×100-as nullmátrixot jelöli (amelynek minden eleme 0). (1 pont)

Mivel a $\mathbf{0}$-val végzett szorzás mindig a $\mathbf{0}$-t adja eredményül, $A^{2012} = \mathbf{0}$ is igaz lesz. (4 pont)

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(8 pont)}$$

Így A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (2 pont)

Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = -1 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az 3 pontot ér. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2 pontot érhet.

2. Nevezzük egy számsorozatot *félig számtaninak*, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 9$ (ahol r-rel a rangot jelöltük).

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jobbról balra haladva minden oszlopból (kivéve az elsőt) vonjuk ki a tőle balra állót. A kapott mátrixot jelölje B. A tanultak szerint $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$. (2 pont)
Mivel a negyediktől kezdve A minden sora számtani sorozatot alkot, ezért B-ben ezek a sorok a másodiktól kezdve csupa azonos elemet tartalmaznak (a megfelelő számtani sorozat differenciáját). (1 pont)
Hasonlóan, B első három sora olyan, hogy az első elemtől eltekintve csak két különböző érték fordul elő benne: a megfelelő félig számtani sorozat kétféle növekménye. (2 pont)
A fentiekből következik, hogy B oszlopai az elsőt leszámítva csak 8 különböző oszlopvektor közül kerülhetnek ki: az első három elem megválasztására mindig két-két lehetőség van, a negyediktől kezdve pedig már csak egy. (3 pont)
Így B-nek összesen 9 különböző fajta oszlopa lehet. Ebből pedig, felhasználva például az oszloprang definícióját, következik, hogy $\mathrm{r}(B) \leq 9$: valóban, B-ből 9-nél több oszlopot választva lesz köztük két azonos, így a választott oszlopok nem lesznek lineárisan függetlenek. Így tehát $\mathrm{r}(A) \leq 9$ is igaz. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat állításánál valójában több is igaz: $\mathrm{r}(A) \leq 5$ is teljesül a feladat feltételeinek megfelelő A mátrixra. Ez következik abból, hogy a megoldásban írt B mátrixból az első oszlopát elhagyva olyan B' mátrixot kapunk, amelynek a negyediktől kezdve minden sora csupa azonos elemből áll. Mivel bármely két ilyen sor közül az egyik a másiknak skalárszorosa, ezért (a sorrang definíciója miatt) $\mathrm{r}(B') \leq 4$ következik. Visszavéve B első oszlopát kapjuk, hogy $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) \leq 5$.

3. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen B, illetve C két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[\mathcal{A}]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[\mathcal{A}]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor!

* * * * *

Álljon a C a $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$ vektorokból és legyen ezek közül egy tetszőlegesen választott $\underline{c}_i$. Az $[\mathcal{A}]_C$ definíciója szerint azt kell megmutatnunk, hogy $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_C$ (vagyis a $\underline{c}_i$ képének C szerinti koordinátavektora) konstans vektor. (1 pont)

A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_B = [\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$. (1 pont)

Mivel $[\mathcal{A}]_B$ minden oszlopa konstans, ezért $[\mathcal{A}]_B$ minden sora azonos, így (a mátrixszorzás definíciója miatt) $[\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$ is konstans vektor lesz; legyen ennek minden eleme γ. (2 pont)

A fentiekből tehát $\mathcal{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot (\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n)$, ahol $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ a B vektorai. (1 pont)

Mivel $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok, ezért létezik egy olyan λ szám, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n = \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n)$, (2 pont)

hiszen $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ nem lehet a nullvektor (mert C vektorai lineárisan függetlenek). (1 pont)

Ezt a fentibe helyettesítve: $\mathcal{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n)$. (1 pont)

Ez pedig épp azt jelenti, hogy $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_C$ minden eleme $\gamma \cdot \lambda$, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A tanult tétel szerint λ akkor és csak akkor sajátértéke a mátrixnak, ha $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, (1 pont)

azaz ha $(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot 3 = 0$. (2 pont)

A kapott $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva: a sajátértékek $\lambda = 1$ és $\lambda = 5$. (1 pont)

Egy $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor definíció szerint akkor lesz a $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha $A \cdot \underline{v} = 5 \cdot \underline{v}$ és $\underline{v} \neq 0$ (ahol A a feladatbeli mátrixot jelöli). (2 pont)

A mátrixszorzás definíciója szerint ez a $2x + y = 5x$, $3x + 4y = 5y$ egyenletrendszerre vezet. (2 pont)

Mindkét egyenletből $y = 3x$ adódik, vagyis sajátvektor lesz minden olyan, a nullvektortól különböző vektor, ami ennek a feltételnek megfelel. Így például 5-höz tartozó sajátvektor a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (2 pont)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív!

a) $\dfrac{22-21i}{z} = 3 - 4i$ b) $z^3 + 125i = 0$

* * * * *

a) Átrendezve: $z = \dfrac{22-21i}{3-4i} =$ (1 pont)

$= \dfrac{(22-21i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} =$ (1 pont)

$= \dfrac{150+25i}{25} = 6 + i$. A kapott megoldásnak pedig a valós része (6) pozitív. (2 pont)

b) Átrendezve: $z^3 = -125i$, így z a $\sqrt[3]{-125i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)

$-125i = 125 \cdot (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$. (1 pont)

Alkalmazva a tanult képletet: $z = 5\left(\cos(90^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(90^\circ + k \cdot 120^\circ)\right)$ valamely $0 \leq k \leq 2$ értékre. (2 pont)

Ha a valós rész pozitív, akkor a szög vagy 0° és 90° között, vagy 270° és 360° között van. Ez csak a $k = 2$ esetben, a 330°-ra teljesül. (1 pont)

Így az egyetlen megoldás: $z = 5(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$. (1 pont)

6. Egy kisváros 20 fős önkormányzati képviselőtestülete három különböző feladatra választ egy-egy bizottságot (legyenek ezek A, B és C). Mindhárom bizottság 4 fős és bármely képviselő több bizottságban is lehet tag, de azt nem szeretnék, ha két bizottságnak teljesen azonos volna a tagsága. További cél, hogy a polgármester (aki egyike a 20 képviselőnek) pontosan egy bizottságban legyen tag a három közül (de az mindegy, hogy melyikben). Hányféleképpen választhatják meg a három bizottságot?

* * * * *

Először eldöntjük, hogy a polgármester melyik bizottságban lesz tag; erre nyilván 3 lehetőség van.(1 pont)
Abba a bizottságba, amelyikbe került, a polgármester mellé a maradék 19 képviselő közül 3-at kell választani. Erre a lehetőségek száma nyilván $\binom{19}{3} =$ (1 pont)

$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Most kiválasztjuk A, B és C közül (például) az első olyannak a tagságát, amely még nem dőlt el. Mivel a polgármestertől különböző 19 képviselőből kell 4-et választanunk (mert a polgármester már több bizottságban nem lehet tag), a lehetőségek száma $\binom{19}{4} =$ (2 pont)

$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Végül kiválasztjuk a harmadik bizottság tagságát is. Itt is a polgármestertől különböző 19 képviselő közül választunk 4-et, de a lehetőségek száma most 1-gyel kevesebb, mint az előbb, mert pontosan ugyanazt a négy képviselőt már nem választhatjuk. Vagyis a lehetőségek száma most $\binom{19}{4} - 1$. (2 pont)

Mivel az először mondott 3 lehetőség mindegyike $\binom{19}{3}$-féleképp folytatható a második választással; majd az így kapott $3 \cdot \binom{19}{3}$ lehetőség mindegyike $\binom{19}{4}$-féleképp folytatható a harmadik választással; majd az így kapott $3 \cdot \binom{19}{3} \cdot \binom{19}{4}$ lehetőség mindegyike $\left(\binom{19}{4} - 1\right)$-féleképp folytatható az utolsó választással, az összes lehetőségek száma:

$$3 \cdot \binom{19}{3} \cdot \binom{19}{4} \cdot \left(\binom{19}{4} - 1\right) = 3 \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1\right). \qquad \text{(2 pont)}$$