Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2011. október 20.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3;1;-1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi egyenletrendszerekkel megadott e_1 és e_2 egyenesek egyikével sem.

$$e_1: \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2} \qquad\qquad e_2: \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z-4$$

2. Legyen $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ és $W = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot X = 0\right\}$, vagyis a W halmaz azokból a 2×2-es A mátrixokból áll, amelyekre $A \cdot X = 0$ teljesül. (0 a 2×2-es, csupa 0 mátrixot jelöli.) Igaz-e, hogy W alteret alkot a 2×2-es mátrixok szokásos összeadás és skalárral szorzás műveletekkel vett vektorterében?

3. Egy 100 dimenziós V vektortérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak V-ben!

4. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 = 4\\
&3x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2\\
&-2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 6\\
&2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + c \cdot x_4 + (c-15) \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

5. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

6. Az $n \times n$-es A mátrix főátlójának minden eleme $\dfrac{n-2}{n}$, a mátrix összes többi eleme $\dfrac{-2}{n}$. Határozzuk meg az A^{2011} mátrixot (vagyis annak a 2011 tényezős szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2011. november 24.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Legyen A tetszőleges mátrix és legyen B az a mátrix, amelyet A-ból nyerünk úgy, hogy annak minden elemét 1-gyel megnöveljük. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A) + 1$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

3. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(1;1;1), (0;1;1), (0;0;1)\}$ és $C = \{(2;1), (2;-1)\}$. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $(3;2;1)$ vektorhoz? (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy B és C valóban bázisok $\mathbb{R}^3$-ben, illetve $\mathbb{R}^2$-ben.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 2$ sajátértéke az alábbi A mátrixnak!
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része negatív és a képzetes része pozitív!

$$\frac{z^5}{512} + \frac{7 + 3\sqrt{3}i}{4 - \sqrt{3}i} = 0$$

6. Hányféleképp választható ki 15 házaspár tagjai (tehát összesen 30 ember) közül 10 ember úgy, hogy a kiválasztott emberek között pontosan 3 házaspár legyen?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2011. december 5.

1. Az $A(2;5;1)$, $B(5;7;4)$, $C(6;4;2)$ és $D(9;7;5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét! (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.)

2. Legyen V a legföljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok (vagyis ax^2+bx+c alakú kifejezések, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$) halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a polinomok szokásos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v}=ax^2+bx+c\in V$ és $\lambda\in\mathbb{R}$ esetén az $\lambda\odot\underline{v}$ szorzást így: $\lambda\odot(ax^2+bx+c)=ax^2+bx+\lambda\cdot c$. Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e a $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$ állítás az alábbi $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\in\mathbb{R}^4$ vektorokra!

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}15\\0\\8\\7\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}12\\6\\7\\p\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{d}=\begin{pmatrix}6\\8\\-9\\12\end{pmatrix}$$

4. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u}\in V$, $\underline{u}\neq\underline{0}$ esetén léteznek olyan $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1+\alpha_1\underline{u},\underline{v}_2+\alpha_2\underline{u},\dots,\underline{v}_{100}+\alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V dimenzióját!

5. Adjuk meg az alábbi determináns *definíció szerinti* kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét!

$$\begin{vmatrix}6&0&0&6&2\\3&1&0&5&7\\0&0&0&4&0\\9&8&3&1&2\\5&0&0&8&0\end{vmatrix}$$

6. A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1\le i,j\le4$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$a_{i,j}=\begin{cases}i+j, & \text{ha } j=1,2,\\ 9-i-j, & \text{ha } j=3,4;\end{cases}\qquad b_{i,j}=\begin{cases}j, & \text{ha } i=1,3,\\ 1-j, & \text{ha } i=2,4,\end{cases}$$

minden $1\le i,j\le4$ esetén.

a) Határozzuk meg az $A\cdot B$ mátrixot!

b) Határozzuk meg a $B\cdot A$ mátrix determinánsát!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2011. december 5.

1. Tegyük fel, hogy az $n\times n$-es A, B és C mátrixokra az $A\cdot X=B$ egyenlet megoldható, de az $A\cdot X=C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n\times n$-es D mátrix, amelyre a $BX=D$ egyenlet nem megoldható! (Az $A\cdot X=B$ egyenlet megoldhatóságán azt értjük, hogy létezik olyan $n\times n$-es X mátrix, amelyre $A\cdot X=B$ fennáll.)

2. Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a p valós paraméter minden értékére!

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & -12 & 0 \\ 5 & 22 & 19 & p & p+3 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B=\{(2;3),(2;5)\}$ és $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}$, ahol $\underline{c}_1=(1;2;1)$ (de $\underline{c}_2$ és $\underline{c}_3$ nem ismert). Határozzuk meg a $\underline{c}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $(6;11)$ vektorhoz az $(1;6;7)$ vektort rendeli!

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy $\lambda=7$ sajátértéke A-nak!

b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek az argumentuma (valós tengellyel bezárt szöge) 100° és 170° közé esik!

$$\frac{z^9}{2^{8,5}}=\frac{3+11i}{4-7i}$$

6. Hány különböző 3×3-as négyzetes részmátrixa van egy olyan 8×10-es (vagyis 8 sorú és 10 oszlopú) mátrixnak, melynek minden eleme különböző?

(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2011. december 13.

1. A $2x + y - 3z = 2$ egyenletű S_1 és az $x + 7y + 3z = 21$ egyenletű S_2 síkok esetében döntsük el, hogy

a) rajta van-e a $P(5; 1; 3)$ pont az S_1 és az S_2 metszésvonalán;

b) merőleges-e egymásra S_1 és S_2?

2. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_{99}$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorrendszerek egyaránt lineárisan függetlenek a V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok közül kiválasztható egy olyan $\underline{v}_i$, amelyre az $\underline{u}_1 + \underline{v}_i, \underline{u}_2 + \underline{v}_i, \ldots, \underline{u}_{99} + \underline{v}_i$ vektorok szintén lineárisan függetlenek!

3. Legyen V (tetszőleges) vektortér, $W \leq V$ altér V-ben és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$ a V vektorai. Tegyük fel, hogy $\underline{a} \notin W$, de $\alpha_1\underline{a} + \beta_1\underline{b} + \gamma_1\underline{c} \in W$, $\alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b} + \gamma_2\underline{c} \in W$ és $\alpha_3\underline{a} + \beta_3\underline{b} + \gamma_3\underline{c} \in W$ teljesül valamely $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ skalárokra. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a jobbra látható determináns értéke 0!

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

4. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ &2x_1 + 9x_2 + 36x_4 = 7 \\ &4x_1 + 5x_2 + 26x_3 - 6x_4 = 1 \\ &3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + (c + 25) \cdot x_4 = c \end{aligned}$$

5. Adjuk meg az alábbi determináns értékét, ha tudjuk, hogy az a, b, c, d valós paraméterekre $a + b + c + d = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & -1 & 6 \\ -2 & 7 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

6. Léteznek-e olyan 3×3-as A és B mátrixok, amelyekre $A \neq B$, de $AC = BC$ fennáll bármely nulla determinánsú, 3×3-as C mátrix esetén?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2011. december 13.

1. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix}$$

2. A 100×50-es (100 sorú és 50 oszlopú) A mátrixra teljesül, hogy a 100×100-as egységmátrix oszlopai közül kiválasztható 50 különböző, amelyek mindegyike kifejezhető A oszlopaiból lineáris kombinációval. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A soraiból bármely 50 hosszúságú sorvektor kifejezhető lineáris kombinációval!

3. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció a (véges dimenziós) V vektortéren és legyen az $\mathcal{A}$ valamely (tetszőleges) bázis szerint felírt mátrixa A. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

a) Ha $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

4. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere és $\mathcal{A} : V \to V$ az a lineáris transzformáció, amely tetszőleges $(x; y; z) \in V$ vektorhoz az $(x + y + z; x + z; y)$ vektort rendeli.

a) Igaz-e, hogy a $(3; 2; 1)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

b) Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak?

(A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban! ($\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.)

$$\frac{10}{z} + \frac{20}{\overline{z}} = \frac{9 + 3i}{2 - i}$$

6. A Nulladik Matematika Zárthelyi egy 15 kérdésből álló feleletválasztós teszt, minden kérdésre 5 lehetséges válasz (A, B, C, D vagy E) közül lehet választani. Minden jó válasz 4 pontot ér, a hibás válaszokért 1 pontot levonnak, az üresen hagyott válaszmezőért sem pont, sem pontlevonás nem jár. Hányféleképpen tölthette ki a tesztet az a hallgató, akinek az eredménye 40 pont?

(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. október 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3;1;-1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi egyenletrendszerekkel megadott e_1 és e_2 egyenesek egyikével sem.

$$e_1: \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2} \qquad\qquad e_2: \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z-4$$

* * * * *

A két egyenes irányvektora $\underline{v}_1(3;-6;2)$ és $\underline{v}_2(2;-5;1)$. (1+1 pont)
Mivel a keresett síknak nincs közös pontja sem e_1-gyel, sem e_2-vel, ezért mindkettővel párhuzamos, (1 pont)
vagyis a normálvektorai merőlegesek $\underline{v}_1$-re és $\underline{v}_2$-re. (2 pont)
A keresett síknak normálvektora tehát például a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektoriális szorzat. (1 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = ((-6)\cdot 1 - 2\cdot(-5))\underline{i} - (3\cdot 1 - 2\cdot 2)\underline{j} + (3\cdot(-5) - (-6)\cdot 2)\underline{k} = (4;1;-3).$$ (2 pont)

A kapott normálvektor és P segítségével a sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $4x + y - 3z = 16$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a teljes értékű megoldáshoz valójában hozzátartozna annak ellenőrzése is, hogy a kapott sík nem tartalmazza sem e_1-et, sem e_2-t; ehhez csupán egy-egy pontot kellene mutatni e_1-en és e_2-n, amelyek nincsenek a kapott síkon. Ennek hiányáért ne vonjunk le pontot, viszont ha olyan megoldó, aki egyébként nem kapna maximális pontot, ellenőrzi ezt, annak ezért 1 pontot adjunk. Megjegyezzük továbbá, hogy a feladatbeli sík nem volna egyértelmű, ha e_1 és e_2 párhuzamos volna; ez nincs így, mert $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ nem skalárszorosai egymásnak. A megoldásban azonban erre nem szükséges hivatkozni, mert a feladat szövegéből feltételezhető, hogy a keresett sík egyértelmű. (Egyébként ha v_1 és v_2 párhuzamos volna, akkor a megoldásban $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \underline{0}$ adódott volna.) Természetesen a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v}_1 \cdot \underline{n} = \underline{0}$, $\underline{v}_2 \cdot \underline{n} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

2. Legyen $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ és $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot X = 0\}$, vagyis a W halmaz azokból a 2×2-es A mátrixokból áll, amelyekre $A \cdot X = 0$ teljesül. (0 a 2×2-es, csupa 0 mátrixot jelöli.) Igaz-e, hogy W alteret alkot a 2×2-es mátrixok szokásos összeadás és skalárral szorzás műveletekkel vett vektorterében?

* * * * *

Az előadáson tanultak szerint azt kell eldöntenünk, hogy W zárt-e az összeadásra és a skalárral szorzásra, vagyis bármely $A_1, A_2 \in W$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén igaz-e, hogy $A_1 + A_2 \in W$ és $\lambda \cdot A_1 \in W$.(2 pont)
Ha $A_1 + A_2 \in W$, akkor $A_1 \cdot X = 0$ és $A_2 \cdot X = 0$. A tanult azonosság (a mátrixszorzás disztributivitása) miatt $(A_1 + A_2) \cdot X = A_1 \cdot X + A_2 \cdot X$, vagyis $(A_1 + A_2) \cdot X = 0 + 0 = 0$, így $A_1 + A_2 \in W$ valóban igaz. (4 pont)
Hasonlóan, $(\lambda \cdot A_1) \cdot X = \lambda \cdot (A_1 \cdot X)$, így $(\lambda \cdot A_1) \cdot X = \lambda \cdot 0 = 0$, így $\lambda \cdot A_1 \in W$ is igaz. (3 pont)
Ezért a feladatbeli állítás igaz, W alteret alkot. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy némi számolással belátható, hogy a feladatbeli X mátrixra az $A \cdot X = 0$ feltételnek valójában csak az $A = 0$ felel meg, így $W = \{0\}$. Ennek megmutatására azonban nincs szükség a feladat megoldásához. A teljes értékű megoldáshoz azt viszont valójában ellenőrizni kellene, hogy W nem üres; ez nyilván igaz, hiszen a 0 benne van. Ennek hiányáért ne vonjunk le pontot, ha viszont olyan megoldó, aki egyébként nem kapna maximális pontot, ellenőrzi W nemüres voltát, annak ezért 1 pontot adjunk. Megjegyezzük továbbá, hogy a fenti megoldás nem támaszkodott arra, hogy X épp a feladatban megadott konkrét mátrix, ugyanez az állítás tehát tetszőleges X mátrixra is igaz. Ennek ellenére természetesen elegendő csak a feladatbeli konkrét X-re megoldani a feladatot.

3. Egy 100 dimenziós V vektortérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak V-ben!

* * * * *

Legyen a feladatbeli 100 bázis $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$. A kívánt bázis elkészítéséhez sorra vesszük a bázisokat és mindegyikből kiválasztunk egy-egy vektort úgy, hogy az addig válaszott vektorok együtt mindig lineárisan független rendszert alkossanak. (1 pont)
Elindulásként válasszunk egy tetszőleges $\underline{b}_1 \in B_1$ vektort; ez önmagában valóban lineárisan független (lévén szó a lineárisan független B_1 rendszer egyik vektoráról). (1 pont)
Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq i < 100$ esetén már sikerült kiválasztani a $\underline{b}_1 \in B_1, \underline{b}_2 \in B_2, \ldots, \underline{b}_i \in B_i$ vektorokat úgy, hogy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_i$ lineárisan függetlenek. Mivel V-ben van 100 elemű lineárisan független rendszer (bármely bázis az), ezért a tanult tétel szerint minden generátorrendszer legalább 100 elemű, így $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_i$ nem generátorrendszer. (2 pont)
Ezért a B_{i+1} bázisnak is kell legyen olyan vektora, amely nincs benne a $\langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$ generált altérben; ha ugyanis B_{i+1} minden vektora kifejezhető volna a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor – mivel B_{i+1} generátorrendszer, hiszen bázis – V minden vektora is kifejezhető volna a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Válasszunk tehát egy tetszőleges $\langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$-be nem tartozó, B_{i+1}-beli vektort és legyen ez $\underline{b}_{i+1}$. Ekkor $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i, \underline{b}_{i+1}$ valóban lineárisan független, mert különben az előadáson tanult lemma (az „újonnan érkező vektor lemmája") miatt $\underline{b}_{i+1} \in \langle \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_i \rangle$ mégis igaz volna. (2 pont)
A fentiek szerint tehát megkapható a $\underline{b}_1 \in B_1, \underline{b}_2 \in B_2, \ldots, \underline{b}_{100} \in B_{100}$ lineárisan független rendszer. Állítjuk, hogy ez már bázis is; ha ugyanis nem volna az (vagyis nem volna generátorrendszer), akkor a fent leírt lépés újabb megismétlésével (B_{101} helyére tetszőleges bázist képzelve) a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{100}, \underline{b}_{101}$ lineárisan független rendszert kapnánk. Ez azonban ellentmondás: mivel V-ben van 100 elemű generátorrendszer (bármely bázis az), ezért minden lineárisan független rendszer legföljebb 100 vektorból állhat. Így a kapott $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{100}$ rendszer valóban bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

4. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_5 = 4\\
&3x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2\\
&-2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 6\\
&2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + c \cdot x_4 + (c - 15) \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 3 & 8 & -9 & 2 & 3 & 2\\ -2 & -5 & 7 & 2 & -8 & 6\\ 2 & 6 & -4 & c & c-15 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & -10\\ 0 & -1 & -3 & 2 & -6 & 14\\ 0 & 2 & 6 & c & c-17 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & c-2 & c-17 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c-21 & 21-3c \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ha $c = 7$, akkor az utolsó sor csupa 0, így elhagyható. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (két további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -11 & 0 & -3 & 20\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ „szabad paraméterek", $x_1 = 20 + 11\alpha + 3\beta$, $x_2 = -8 - 3\alpha - 2\beta$, $x_4 = 3 + 2\beta$. (2 pont)

Ha viszont $c \neq 7$, akkor az utolsó sor $(3c - 21)$-gyel osztásával és a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (4 darab) „kinullázásával" kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 17\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \text{(2 pont)}$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = 17 + 11\alpha$, $x_2 = -6 - 3\alpha$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A determinánsokra vonatkozó, az előadáson tanult egyik tulajdonság szerint az

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2+7 & 5+8 & 3+16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{vmatrix}$$

determináns értéke épp az A és B determinánsának összegével egyezik meg. (5 pont)
Mivel a fenti determináns két sora (az első és a harmadik) megegyezik, ezért (egy másik tanult tulajdonság szerint) az értéke 0. (4 pont)
Így $\det A + \det B = 0$. (1 pont)
A feladat természetesen megoldható $\det A$ és $\det B$ (például Gauss-eliminációval való) kiszámításával is: ekkor $\det A = 8$ és $\det B = -8$ adódik. Ebben az esetben a $\det A + \det B$ összeadásért (a fenti pontozásnak megfelelően) 1 pont jár, a maradék 9 pontból pedig – amennyiben a megoldáson látszik, hogy a megoldó a determináns kiszámításának módszerével egyébként tisztában van – minden számítási hibáért 1 pont vonandó le. Ha a megoldásban elvi hiba van (például sor vagy oszlop konstanssal szorzása vagy sorok vagy oszlopok cseréje esetén a determináns értéke megváltozásának figyelmen kívül hagyása), akkor a számításért (a $\det A + \det B$ összeadáson kívül) 2-3 pontnál több nem adható; az is csak akkor, ha az elvégzett eliminációs lépések egyébként a helyes cél irányába mutatnak. Ugyancsak nem adható 2-3 pontnál több egy olyan megoldónak, aki ugyan helyes eliminációs lépéseket végez, de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát.

6. Az $n \times n$-es A mátrix főátlójának minden eleme $\frac{n-2}{n}$, a mátrix összes többi eleme $\frac{-2}{n}$. Határozzuk meg az A^{2011} mátrixot (vagyis annak a 2011 tényezős szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

* * * * *

Első lépésként az A^2 mátrixot határozzuk meg.
A mátrixszorzás definíciója szerint A^2 főátlójának minden eleme

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 + (n-1) \cdot \left(\frac{-2}{n}\right)^2 = \qquad \text{(2 pont)}$$

$$= \frac{(n-2)^2 + (n-1) \cdot 4}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} = 1. \qquad \text{(1 pont)}$$

Hasonlóan, A^2-ben a főátlón kívül minden elem $2 \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{-2}{n}\right) + (n-2) \cdot \left(\frac{-2}{n}\right)^2 =$ (2 pont)

$$= \frac{(-4) \cdot (n-2) + (n-2) \cdot 4}{n^2} = \frac{0}{n^2} = 0. \qquad \text{(1 pont)}$$

A fentiek szerint tehát $A^2 = E$ (ahol E az $n \times n$-es egységmátrix). (1 pont)
Mivel $M \cdot E = M$ minden M mátrixra igaz, ezért $A^3 = A^2 \cdot A = E \cdot A = A$, $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = E$, stb. Tehát az A páratlan hatványai A-val, páros hatványai E-vel egyenlők, így $A^{2011} = A$. (3 pont)
Az utolsó 3 pontért indoklásnak elfogadható az $A^{2011} = (A^2)^{1005} \cdot A = E^{1005} \cdot A = E \cdot A = A$ számítás is (akkor is, ha a megoldó az $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$ azonosságot indoklás nélkül használja fel).

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. november 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A^{-1}-et Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(7 pont)}$$

Így A^{-1} létezik és nem más, mint a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (3 pont)
Minden számolási hiba 1 pont levonást jelentsen. Amennyiben a megoldó visszaszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy számolási hibát vétett (de azt nem találja meg), a számolási hibákért járó pontlevonás 1-gyel csökkenthető, ha az összpontszám így sem éri el a 10-et. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = 1 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az 2 pontot érjen. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 1-2 pontot érhet.

2. Legyen A tetszőleges mátrix és legyen B az a mátrix, amelyet A-ból nyerünk úgy, hogy annak minden elemét 1-gyel megnöveljük. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A) + 1$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

* * * * *

A és B esetében is vonjuk le az első oszlopot az összes többiből; a kapott mátrixokat jelölje A' és B'.(2 pont)
Ekkor B' és A' csak az első oszlopukban különbözhetnek, a többi oszlopuk már azonos. (2 pont)
Továbbá $\mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(A)$ és $\mathrm{r}(B') = \mathrm{r}(B)$, mert a Gauss-elimináció (akár oszlopokon, akár sorokon végzett) lépései a rangot nem változtatják meg. (2 pont)
Ha a bizonyítandó állítással szemben $\mathrm{r}(B) \geq \mathrm{r}(A)+2$, vagyis $\mathrm{r}(B') \geq \mathrm{r}(A')+2$ teljesülne, akkor B' oszlopai közül ki lehetne választani $\mathrm{r}(A')+2$ lineárisan függetlent az oszloprang definíciója szerint. (2 pont)
Azonban ezek közül az elsőt elhagyva (ha az egyáltalán a kiválasztottak között szerepel) azt kapnánk, hogy A' oszlopai közül kiválasztható $\mathrm{r}(A')+1$ lineárisan független. Ez nyilvánvalóan ellentmond az oszloprang definíciójának, így $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A)+1$ valóban igaz. (2 pont)

3. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(1;1;1),(0;1;1),(0;0;1)\}$ és $C = \{(2;1),(2;-1)\}$. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $(3;2;1)$ vektorhoz? (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy B és C valóban bázisok $\mathbb{R}^3$-ben, illetve $\mathbb{R}^2$-ben.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$(3;2;1) = 3\cdot(1;1;1) + (-1)\cdot(0;1;1) + (-1)\cdot(0;0;1)$, így $[(3;2;1)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}((3;2;1))]_C = [\mathcal{A}_{B,C}] \cdot [(3;2;1)]_B$. (2 pont)

Elvégezve a szorzást: $[\mathcal{A}((3;2;1))]_C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 pont)

Ezért $\mathcal{A}((3;2;1)) = 3\cdot(2;1) + 1\cdot(2;-1) = (8;2)$. (3 pont)

4. a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 2$ sajátértéke az alábbi A mátrixnak!
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) A tanult tétel szerint $\lambda = 2$ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(A-2E) = 0$, vagyis ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(2 pont)}$$

A fenti determináns negyedik sorából a második sor másfélszeresét levonva csupa 0 sort kapunk, így $\det(A-2E) = 0$ valóban igaz, ezért $\lambda = 2$ sajátérték. (2 pont)

b) Mivel $\lambda = 2$-ről tudjuk, hogy sajátérték, ezért kereshetünk ehhez tartozó $\underline{v}$ sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}$-t keresünk, amelyre $A\cdot\underline{v} = 2\cdot\underline{v}$. (1 pont)

Ha $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$, akkor $A\cdot\underline{v} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2y+2z+4u \\ 3x+7y+2z \\ 3z+8u \end{pmatrix}$ és $2\cdot\underline{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2u \end{pmatrix}$, (1 pont)

vagyis az $A\cdot\underline{v} = 2\cdot\underline{v}$ egyenlet a $3x+2y = 2x$, $2y+2z+4u = 2y$, $3x+7y+2z = 2z$, $3z+8u = 2u$ egyenletrendszerre vezet. (1 pont)
Rendezés után az első és a harmadik egyenletből $x = y = 0$, a másik két egyenletből egyaránt a $z+2u = 0$ összefüggés következik. (1 pont)

Vagyis sajátvektor minden $u \neq 0$-ra a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2u \\ u \end{pmatrix}$ vektor (például tehát a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$). (2 pont)

Megjegyezzük, hogy a b) feladat megoldásából az a) feladat állítása is következik: valóban, mivel a talált $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorra $A \cdot \underline{v} = 2 \cdot \underline{v}$ teljesül, ezért $\lambda = 2$ definíció szerint sajátértéke A-nak. Az a) feladatért járó 4 pont természetesen ezzel az indoklással is megszerezhető. (Megjegyezzük még, hogy A-nak három további (irracionális) sajátértéke is van, így ezekhez is tartoznak sajátvektorok. Így a b) feladatnak elvileg további megoldásai is vannak, ezeknek a meghatározása azonban számológép nélkül nagyon körülményes volna.)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része negatív és a képzetes része pozitív!

$$\frac{z^5}{512} + \frac{7+3\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i} = 0$$

* * * * *

$\dfrac{7+3\sqrt{3}i}{4-\sqrt{3}i} = \dfrac{(7+3\sqrt{3}i)(4+\sqrt{3}i)}{(4-\sqrt{3}i)(4+\sqrt{3}i)} = \dfrac{19+19\sqrt{3}i}{19} = 1+\sqrt{3}i.$ (2 pont)

Ezt behelyettesítve, 512-vel szorozva és átrendezve: $z^5 = -512 - 512\sqrt{3}i$. (1 pont)

z tehát $\sqrt[5]{-512-512\sqrt{3}i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)

$-512 - 512\sqrt{3}i = 1024\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{10}(\cos 240° + i \sin 240°)$. (2 pont)

Ebből $\sqrt[5]{-512-512\sqrt{3}i} = 2^2\left(\cos(48° + k \cdot 72°) + i \sin(48° + k \cdot 72°)\right)$, $0 \leq k \leq 4$. (1 pont)

Ha a valós rész negatív és a képzetes rész pozitív, akkor a szög 90° és 180° között van. Ez csak a $k = 1$ esetben, a 120°-ra teljesül. (1 pont)

Így az egyetlen megoldás: $z = 4(\cos 120° + i \sin 120°) = -2 + 2\sqrt{3}i$. (2 pont)

6. Hányféleképp választható ki 15 házaspár tagjai (tehát összesen 30 ember) közül 10 ember úgy, hogy a kiválasztott emberek között pontosan 3 házaspár legyen?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Először válasszuk ki a 15 házaspár közül azt a hármat, amelyeknek mindkét tagja bekerül a kiválasztandó 10 ember közé. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\dbinom{15}{3}$ = (1 pont)

$= \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6}$. (1 pont)

A maradék házaspárok tagjai közül most úgy kell választani 4 embert, hogy minden házaspárból legföljebb csak egy tag választható (különben 3-nál több házaspárt tartalmazna a kiválasztott emberek halmaza). Ezért válasszuk ki a maradék 12 házaspár közül azt a 4-et, amelyeknek egy-egy tagját még bevesszük a kiválasztandó emberek közé. A lehetőségek száma most $\dbinom{12}{4} =$ (3 pont)

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{24}$. (1 pont)

Végül az utóbb kiválasztott 4 házaspár mindegyikéről el kell döntenünk, hogy annak a férfi vagy a nő tagját vesszük be a kiválasztandó emberek közé. Mind a 4 esetben kétféle döntésünk van, így a lehetőségek száma (például az ismétléses variációnál tanultak miatt) $2^4 = 16$. (2 pont)

Mivel az először mondott $\binom{15}{3}$ választási lehetőség mindegyike $\binom{12}{4}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, majd az így kapott összesen $\binom{15}{3} \cdot \binom{12}{4}$ lehetőség mindegyike 2^4 féleképpen fejezhető be, ezért az összes lehetőségek száma $\dbinom{15}{3} \cdot \dbinom{12}{4} \cdot 2^4 = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 16}{6 \cdot 24}$. (2 pont)

Bár a feladat szövege szerint az eredmény megadásához csak a négy alapművelet használható, nem jár pontlevonás azért, ha valaki 2^4 értékét nem számítja ki.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. december 5.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Az $A(2;5;1)$, $B(5;7;4)$, $C(6;4;2)$ és $D(9;7;5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét! (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.)

* * * * *

A keresett egyenesnek irányvektora lesz minden, az ABC lap síkjára merőleges vektor. (1 pont)
Jó irányvektor lesz tehát például a $\underline{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzat (vagy bármely, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorokra egyaránt merőleges vektor). (2 pont)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5;7;4) - (2;5;1) = (3;2;3)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (6;4;2) - (2;5;1) = (4;-1;1)$. (1 pont)
$\underline{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$-t a tanult képlettel meghatározva:
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 1 - 3\cdot(-1))\underline{i} - (3\cdot 1 - 3\cdot 4)\underline{j} + (3\cdot(-1) - 2\cdot 4)\underline{k} = (5;9;-11).$$ (3 pont)
A kapott irányvektor és D segítségével a magasságvonal egyenletrendszere már a tanult képlettel felírható:
$$\frac{x-9}{5} = \frac{y-7}{9} = \frac{z-5}{-11}.$$ (3 pont)
Természetesen az irányvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{0}$, $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{v}$ irányvektor.

2. Legyen V a legföljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok (vagyis $ax^2 + bx + c$ alakú kifejezések, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$) halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a polinomok szokásos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} = ax^2 + bx + c \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\lambda \odot \underline{v}$ szorzást így: $\lambda \odot (ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + \lambda \cdot c$. Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

* * * * *

Például a $\underline{v} = x^2 + x + 1$ és $\lambda = \mu = 1$ választással $(\lambda + \mu) \odot \underline{v} = 2 \odot (x^2 + x + 1) = x^2 + x + 2$, de $\lambda \odot \underline{v} \oplus \mu \odot \underline{v} = 1 \odot (x^2 + x + 1) \oplus 1 \odot (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = 2x^2 + 2x + 2.$ (5 pont)
Ez azt jelenti, hogy nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $(\lambda + \mu) \odot \underline{v} = \lambda \odot \underline{v} \oplus \mu \odot \underline{v}$ axióma, így V **nem** vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel. (5 pont)

Természetesen a fenti axióma sérülésére sok jó példa mutatható (például a fentinél $\underline{v} = x^2$ és $\lambda = \mu = 1$ még egyszerűbb lett volna). A vektortér definícójában szereplő axiómák közül az összes többi teljesül. Bár ezek ellenőrzése közvetlenül nem visz közelebb a feladat megoldásához, mégis, a maradék hét axióma helyes leellenőrzéséért legföljebb 3 pont adható. (Ez a pontszám tehát *nem* az axiómák felsorolásáért jár, ez önmagában az útmutató elején írtaknak megfelelően nem ér pontot.) A feladat megoldható úgy is, hogy kimutatjuk a $0 \odot \underline{v} = \underline{0}$ tulajdonság sérülését (például a $\underline{v} = x^2$ esetében). Egy ilyen megoldásban egyrészt hivatkozni kell arra, hogy ez a tulajdonság a tanult tétel (de nem a definíció) szerint minden vektortérben érvényes, másrészt indokolni szükséges, hogy a $\underline{0}$ miért a 0 polinom volna; ezek elmulasztásáért az első, illetve a második esetben 2, illetve 3 pontnyi levonás járjon.

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorokra!

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$ teljesül. (2 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ konkrét értékét, a $3\alpha + 15\beta + 12\gamma = 6$, $-\alpha + 6\gamma = 8$, $2\alpha + 8\beta + 7\gamma = -9$, $\alpha + 7\beta + p \cdot \gamma = 12$ lineáris egyenletrendszerre jutunk. (1 pont)
Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 15 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ 1 & 7 & p & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 2 & p-4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & p-8 & 6 \end{array}\right) \sim \text{(1 pont)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3p-18 \end{array}\right) \sim \qquad \text{(2 pont)}$$

Látható, hogy ha $3p - 18 \neq 0$, akkor „tilos sor” keletkezik, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása.
Ha viszont $3p - 18 = 0$, akkor az utolsó sor elhagyható és az egyenletrendszer megoldható lesz. (2 pont)
Így a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p = 6$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy $p = 6$ esetén az elimináció folytatásával megkapható az egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása: $\alpha = -26$, $\beta = 8$, $\gamma = -3$. Azonban a kérdés megválaszolásához erre nincs szükség.

4. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ esetén léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}, \underline{v}_2 + \alpha_2\underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V dimenzióját!

* * * * *

Megmutatjuk, hogy $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ generátorrendszert alkotnak V-ben; ebből következni fog, hogy bázist is alkotnak (hiszen a feladat szerint lineárisan függetlenek), vagyis hogy $\dim V = 100$. (1 pont)
Legyen $\underline{u} \in V$ tetszőleges vektor; azt kell megmutatnunk, hogy $\underline{u}$ kifejezhető $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ segítségével lineáris kombinációval. (Ez $\underline{u} = \underline{0}$-ra nyilván igaz, elég $\underline{u} \neq \underline{0}$-ra megmutatni.) (1 pont)
Felhasználva a feladat feltételét $\underline{u}$-ra: léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Vagyis léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ skalárok, hogy ezek nem mindegyike 0 és $\lambda_1(\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}) + \lambda_2(\underline{v}_2 + \alpha_2\underline{u}) + \ldots + \lambda_{100}(\underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}) = \underline{0}$. (2 pont)
Beszorzás, átrendezés és kiemelés után:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{100}\underline{v}_{100} + (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_{100}\alpha_{100})\underline{u} = \underline{0}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Legyen $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_{100}\alpha_{100}$. Ekkor $\beta \neq 0$, különben a fenti egyenlőségből $\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{100}\underline{v}_{100} = \underline{0}$ adódna, ellentmondásban $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ lineáris függetlenségével (hiszen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ nem mind 0). (3 pont)
Így a fenti egyenlőségből átrendezés után $\underline{u} = -\frac{\lambda_1}{\beta}\underline{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\beta}\underline{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{100}}{\beta}\underline{v}_{100}$ adódik, vagyis az $\underline{u}$-t előállító lineáris kombináció valóban létezik. (2 pont)

5. Adjuk meg az alábbi determináns *definíció szerinti* kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét!

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Ha nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak a 4-est választhatjuk; így az ötödik sorból a 8-ast már nem, csak az 5-öst választhatjuk (mert a negyedik oszlopból már vettünk elemet); hasonlóan folytatva, az első sorból csak a 2-est, ezért a másodikból csak az 1-est, végül a negyedikből csak a 3-ast választhatjuk. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5$. (4 pont)
A fenti, egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,2,4,3,1 (hiszen az első sorból a 5. elemet vettük, a másodikból a 2.-at, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 8 (hiszen 8 inverzióban álló pár van: $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,1)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: $+$. (2 pont)

6. A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$a_{i,j} = \begin{cases} i + j, & \text{ha } j = 1, 2, \\ 9 - i - j, & \text{ha } j = 3, 4; \end{cases} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1, 3, \\ 1 - j, & \text{ha } i = 2, 4, \end{cases}$$

minden $1 \le i, j \le 4$ esetén.

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot!

b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát!

* * * * *

a) A feladatbeli két mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(3 pont)}$$

Az A mátrix i-edik sora $\begin{pmatrix} a & a+1 & 7-a & 6-a \end{pmatrix}$, a B mátrix j-edik oszlopa $\begin{pmatrix} x & 1-x & x & 1-x \end{pmatrix}^T$ alakú minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Ezért az $A \cdot B$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem: $ax + (a+1)(1-x) + (7-a)x + (6-a)(1-x) = ax + a - ax + 1 - x + 7x - ax + 6 - 6x - a + ax = 7$. Ezért a 4×4-es $A \cdot B$ mátrix minden eleme 7. (4 pont)
b) $\det(A \cdot B) = 0$, hiszen $A \cdot B$ minden eleme (így minden sora) egyenlő. A determinánsok szorzástétele miatt $\det(B \cdot A) = \det(A \cdot B)$ (mindkét oldal $\det A \cdot \det B$-vel egyenlő), ezért $\det(B \cdot A) = 0$. (3 pont)
Az a) feladatban $A \cdot B$ kiszámítását nem szükséges a fenti részletességgel leírni; világosan kell látszania a megoldásból, hogy a megoldó tisztában van a mátrixszorzással és látja, hogy az adott esetben miért a csupa 7 mátrix az eredmény. A b) feladat megoldásában természetesen hivatkozhatunk arra is, hogy $\det B = 0$ (mert vannak azonos sorai), ebből is következik a determinánsok szorzástétele szerint $\det(B \cdot A) = 0$. Sőt, akár a szorzástétel nélkül is megoldható a feladat: a B első és harmadik sorának egyenlőségéből ugyanez következik $B \cdot A$-ra is, így $\det(B \cdot A) = 0$.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A, B és C mátrixokra az $A \cdot X = B$ egyenlet megoldható, de az $A \cdot X = C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n \times n$-es D mátrix, amelyre a $BX = D$ egyenlet nem megoldható! (Az $A \cdot X = B$ egyenlet megoldhatóságán azt értjük, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, amelyre $A \cdot X = B$ fennáll.)

* * * * *

Állítjuk, hogy $\det A = 0$. Valóban, ellenkező esetben létezne az A^{-1} mátrix, így $X = A^{-1}C$ megoldása volna az $AX = C$ egyenletnek (mert $A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = EC = C$), pedig $AX = C$ a feladat szövege szerint nem megoldható. (3 pont)
Ebből a determinánsok szorzástétele szerint $\det B = 0$ következik: ha X_0 megoldása az $AX = B$ egyenletnek (ami a feladat szerint megoldható), akkor $\det B = \det(AX_0) = \det A \cdot \det X_0 = 0 \cdot \det X_0 = 0$.(3 pont)
$\det B = 0$-ból teljesen hasonlóan következik, hogy ha a $BX = D$ egyenlet megoldható, akkor $\det D = 0$. Így valóban van olyan D, amelyre $BX = D$ nem megoldható: minden nemnulla determinánsú D mátrix (például az egységmátrix) megfelel ennek a feltételnek. (4 pont)
Alternatív megoldásként belátható, hogy a $D = C$ választás is megfelel a feladat feltételeinek: valóban, ha X_1 megoldása volna a $BX = D$ egyenletnek és X_2 pedig az $AX = B$-nek, akkor X_2X_1 megoldása volna $AX = C$-nek, szemben a feladat állításával.

2. Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a p valós paraméter minden értékére!

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & -12 & 0 \\ 5 & 22 & 19 & p & p+3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A rang kiszámítására a Gauss-eliminációt alkalmazzuk (a feladatbeli mátrix-szal indítva):

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 10 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -10 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & p-10 & p-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p+4 \end{pmatrix} \sim \qquad (1 \text{ pont})$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-p \end{pmatrix} \qquad (3 \text{ pont})$$

Ha $p = 4$, akkor az utolsó sor csupa 0 sor, így elhagyható. Ekkor a vezéregyesek száma a kapott lépcsős alakban 3, így a mátrix rangja is ennyi. (3 pont)
Ha $p \neq 4$, akkor az utolsó sor $(4 - p)$-vel osztása után kapjuk a lépcsős alakot. Ekkor a vezéregyesek száma, és ezzel a mátrix rangja is 4. (3 pont)
Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) eliminációs lépéseket végez, de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(2;3), (2;5)\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$, ahol $\underline{c}_1 = (1;2;1)$ (de $\underline{c}_2$ és $\underline{c}_3$ nem ismert). Határozzuk meg a $\underline{c}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $(6;11)$ vektorhoz az $(1;6;7)$ vektort rendeli!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

$(6;11) = 2\cdot(2;3) + 1\cdot(2;5)$, így $[(6;11)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pont)
A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}((6;11))]_C = [\mathcal{A}_{B,C}]\cdot[(6;11)]_B$. (2 pont)
Elvégezve a szorzást: $[\mathcal{A}((6;11))]_C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)
Ezért $\mathcal{A}((6;11)) = \underline{c}_1 + 2\underline{c}_3$. (2 pont)
Mivel $\mathcal{A}((6;11)) = (1;6;7)$ és $\underline{c}_1 = (1;2;1)$, ezért $\underline{c}_3 = \frac{1}{2}((1;6;7)-(1;2;1)) = (0;2;3)$. (2 pont)

4. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak!
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

* * * * *

a) A tanult tétel szerint $\lambda = 7$ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(A-7E) = 0$. Mivel $A-7E$ negyedik oszlopa a feladat szerint csupa nulla, ezért $\det(A-7E) = 0$ igaz, így $\lambda = 7$ valóban sajátérték. (3 pont)
b) Mivel $\lambda = 7$-ről tudjuk, hogy sajátérték, ezért kereshetünk ehhez tartozó $\underline{v}$ sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}$-t keresünk, amelyre $\underline{v} \neq \underline{0}$ és $A\cdot\underline{v} = 7\cdot\underline{v}$. (2 pont)
Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ekkor $A\cdot\underline{v}$ nem más, mint az A negyedik oszlopa, vagyis $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T$.
Ezért $A\cdot\underline{v} = 7\cdot\underline{v}$ valóban igaz, így $\underline{v}$ sajátvektor. (5 pont)
Megjegyezzük, hogy a b) feladat megoldásából az a) feladat állítása is következik: valóban, mivel a talált $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektorra $A\cdot\underline{v} = 7\cdot\underline{v}$ teljesül, ezért $\lambda = 7$ definíció szerint sajátértéke A-nak. Az a) feladatért járó 3 pont természetesen ezzel az indoklással is megszerezhető.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek az argumentuma (valós tengellyel bezárt szöge) 100° és 170° közé esik!

$$\frac{z^9}{2^{8,5}} = \frac{3+11i}{4-7i}$$

* * * * *

$\dfrac{3+11i}{4-7i} = \dfrac{(3+11i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)} = \dfrac{-65+65i}{65} = -1+i.$ (2 pont)
Ezt behelyettesítve és $2^{8,5}$-nel szorozva: $z^9 = -2^{8,5} + 2^{8,5}i$. (1 pont)
z tehát $\sqrt[9]{-2^{8,5}+2^{8,5}i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
$-2^{8,5} + 2^{8,5}i = 2^9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^9(\cos 135° + i\sin 135°)$. (2 pont)
Ebből $\sqrt[9]{-2^{8,5}+2^{8,5}i} = 2\left(\cos(15° + k\cdot 40°) + i\sin(15° + k\cdot 40°)\right)$, $0 \le k \le 8$. (1 pont)
A $15° + k\cdot 40°$, $0 \le k \le 8$ alakú szögek közül 100° és 170° közé csak a 135° esik (a $k = 3$ esetben).(1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z = 2(\cos 135° + i\sin 135°) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$. (2 pont)

6. Hány különböző 3×3-as négyzetes részmátrixa van egy olyan 8×10-es (vagyis 8 sorú és 10 oszlopú) mátrixnak, melynek minden eleme különböző?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Mivel a mátrix elemei mind különbözők, ezért egy 3×3-as részmátrix kiválasztása nem mást jelent, mint annak a 3 sornak és 3 oszlopnak a kiválasztását, amelyek a részmátrixot meghatározzák. (2 pont)
Először válasszuk ki a mátrix 8 sora közül azt a 3-at, amelyek a részmátrixban szerepelnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{8}{3}$. (2 pont)
Ezután válasszuk ki a 10 oszlop közül a részmátrixban szereplő 3-at; a lehetőségek száma $\binom{10}{3}$. (1 pont)
Mivel az először mondott $\binom{8}{3}$ választási lehetőség mindegyike $\binom{10}{3}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért a lehetőségek száma összesen $\binom{8}{3}\cdot\binom{10}{3} =$ (3 pont)
$= \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{6}\cdot\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{6}.$ (2 pont)