Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2010. október 21.

1. Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1;5;5)$ pontot?

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

3. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ a (tetszőleges) V vektortér vektorai, amelyekre $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függően).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$

4. A t paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e olyan $\underline{y}$ sorvektor, amelyre $\underline{y} \cdot A = \underline{c}$ teljesül, ahol az A mátrix és a $\underline{c}$ sorvektor az alábbiak. Ha létezik ilyen $\underline{y}$, adjuk meg az összeset!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 7 \\ 25 & 19 & 16 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 20 & 16 & t \end{pmatrix}.$$

5. Legyen egy parallelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0;1;-2)$, $B(1;1;5)$, illetve $C(1;3;-1)$. Határozzuk meg a parallelepipedon térfogatát!

6. Legyen A egy 50×100-as (50 sorú és 100 oszlopú) mátrix. Tegyük fel, hogy bárhogyan is választjuk a $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ vektort, mindig található olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^{100}$ vektor, amelyre $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Határozzuk meg A rangját!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2010. november 25.

1. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.
a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok halmazán (és az eredményt adjuk meg algebrai alakban)!
a) $(3 + 2i)^2$ b) $(1 + 17i) : (3 + i)$ c) $\sqrt[3]{-1000}$

4. Egy MIRNIXDIRNIX nevű országban furcsa szabályok szerint játsszák a lottót: egy szelvény kitöltése abból áll, hogy a játékos az ország nevének betűit összekeveri és valamilyen sorrendben leírja. (Így például egy lehetséges szelvény így nézhet ki: XIIRXMNDNIRI.) Az ország egyik lakója ezen a héten három szelvénnyel is szeretne játszani. Hányféleképpen töltheti ki a három szelvényt, ha arra azért szeretne vigyázni, hogy a szelvényei között ne legyen két ugyanolyan?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

5. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal)!

$$\log_2 \left[\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \ldots + \binom{101}{50} \right]$$

6. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2010. december 6.

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12;1;7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x-3=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest!

2. Legyen V (tetszőleges) vektortér és $W \leq V$ egy altér V-ben. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a V vektorai, amelyekre $\underline{a} \in W$, $\underline{b} \notin W$, $\underline{c} \notin W$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V, W, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ választásától függően).

a) $2\underline{c} \in W$ b) $\underline{a}+\underline{b} \in W$ c) $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c} \in W$

3. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldható-e és ha igen, adjuk meg az összes megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 3x_4 + 8x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 10x_5 &= 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 8x_5 &= 21 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + p \cdot x_5 &= 22 \end{aligned}$$

4. Az alábbi determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Határozzuk meg azt az A mátrixot, amelynek az inverze az alábbi B mátrix!

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. A nullmátrixtól különböző, tetszőleges A mátrix rangját jelölje r. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ mátrixok, amelyek mind 1 rangúak és amelyekre $A_1 + A_2 + \ldots + A_r = A$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2010. december 6.

1. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1; 2; 3)$, $\underline{b}_2 = (2; 3; 4)$ és $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3; 6; 5)$!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

2. A (5×5)-ös A mátrix főátlójának minden eleme 2, a mátrix összes többi eleme 1.

a) Adjuk meg A egy sajátértékét!

b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

3. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is negatív!

$$\frac{5+3i}{3-5i} \cdot z^5 + 16 \cdot \sqrt{3} + 16i = 0$$

4. Klappenkappe úr elfelejtette a jelszavát, csak a következőkre emlékszik:

1. A jelszó 9 karakterből áll, amelyek mindegyike az angol ábécé 26 betűjének valamelyike. (A jelszó csupa kisbetűből áll.)
2. A jelszóban pontosan 4 különböző féle betű szerepel.
3. A jelszó első 4 betűje között nincs ismétlődés.

(Ezek szerint Klappenkappe úr jelszava lehet például GRHXRRXGR.)

Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

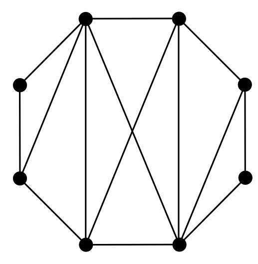
5. Adjuk meg az összes olyan 1 és 50 közötti n egészt, amelyre az alábbi egyenlet fennáll:

$$\binom{100}{2n}\binom{2n}{n} = \binom{100}{n}\binom{80}{n}$$

6. Az ábrán látható gráf legyen G, a komplementerét jelölje $\overline{G}$.

a) Tartalmaz-e $\overline{G}$ a K_4-gyel izomorf részgráfot? (K_4 az a 4 csúcsú, egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs szomszédos.)

b) Izomorf-e G és $\overline{G}$?



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2010. december 15.

1. Melyik pontjában metszi az $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+7}{3} = \dfrac{z+9}{7}$ egyenletrendszerű e egyenest az a sík, amely merőleges e-e és átmegy a $P(7;4;2)$ ponton?

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Tetszőleges $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in V$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén értelmezzük V-n a $\oplus$ összeadást és $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1+y_2) \end{pmatrix}, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^4$ vektorok!

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 19 \\ 7 \\ p \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 23?

$$\begin{vmatrix} 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 22 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{vmatrix}$$

5. Megválasztható-e a p és q valós paraméterek értéke úgy, hogy az alábbi A mátrix inverze sajátmaga legyen?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ p & q \end{pmatrix}$$

6. Legyenek A és B (3×3)-as mátrixok, melyekre $\mathrm{r}(A) = 3$ és $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesülnek (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (A és B választásától függően).

a) $\mathrm{r}(A^3) = 3$ b) $\mathrm{r}(B^3) = 3$ c) $\mathrm{r}(B^3) = 2$

(A^3, illetve B^3 az $A \cdot A \cdot A$, illetve a $B \cdot B \cdot B$ szorzatot jelöli.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2010. december 15.

1. Legyen V három, W kettő dimenziós vektortér, továbbá legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$ bázis W-ben. Az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés mátrixa a B és C bázisok szerint a jobb oldalon látható mátrix. Igazak-e az alábbi állítások?

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 + 3\underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ b) $\underline{c}_1 + 2\underline{c}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$

2. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét!

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok halmazán (és az eredményt adjuk meg algebrai alakban)!

a) $(7 - 2i)^2$ b) $(16 - 11i) : (2 - 3i)$ c) $\sqrt[3]{-27i}$

4. Knusperkäse úr elfelejtette a jelszavát, csak a következőkre emlékszik:

1. A jelszó 7 karakterből áll, amelyek közül 6 az angol ábécé 26 betűjének valamelyike, egy pedig egy számjegy. (A betűk mind nagybetűk.)
2. A jelszóban szereplő betűk mind különbözők és (a számjegyet most nem számítva) ábécé szerinti növekvő sorrendben követik egymást.

(Ezek szerint Knusperkäse úr jelszava lehet például BF7JMQW.)

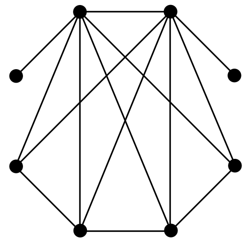
Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

5. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal)!

$$\log_2 \left[1 \cdot \binom{32}{1} + 2 \cdot \binom{32}{2} + 3 \cdot \binom{32}{3} + \ldots + 31 \cdot \binom{32}{31} + 32 \cdot \binom{32}{32} \right]$$

6. Izomorf-e az alábbi gráf a saját komplementerével?



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. október 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1;5;5)$ pontot?

* * * * *

A megadott sík (egy) normálvektora $\underline{n}(5;-4;3)$. (2 pont)
Mivel a két sík párhuzamos, $\underline{n}$ a keresett síknak is normálvektora. (3 pont)
P és $\underline{n}$ alapján a keresett sík egyenlete: $5x - 4y + 3z = 0$. (2 pont)
Az origó koordinátái ezt kielégítik, így az origó rajta van a síkon. (3 pont)

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

* * * * *

Például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ választással $1 \odot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (5 pont)
Ez azt jelenti, hogy nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $1 \odot \underline{v} = \underline{v}$ axióma, így V **nem** vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel. (5 pont)
A vektortér definícójában szereplő axiómák közül még $\lambda \odot (\mu \odot \underline{v}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \underline{v}$ sérül, a többi teljesül. Bár ezek ellenőrzése közvetlenül nem visz közelebb a feladat megoldásához, mégis, a maradék hat axióma helyes leellenőrzéséért legföljebb 3 pont adható. (Ez a pontszám tehát *nem* az axiómák felsorolásáért jár, ez önmagában az útmutató elején írtaknak megfelelően nem ér pontot.)

3. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ a (tetszőleges) V vektortér vektorai, amelyekre $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függően).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$

* * * * *

a) Az állítás biztosan hamis. Ugyanis ha $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ igaz volna, akkor $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesülne (hiszen ha $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d}$, akkor $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d} + 0 \cdot \underline{b}$). (2 pont)

b) Az állítás biztosan igaz. Ugyanis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ miatt tudjuk, hogy létezik a $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ lineáris kombináció. (1 pont)

Itt $\gamma = 0$ kell teljesüljön, ellenkező esetben átrendezéssel $\underline{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\underline{a} - \frac{\beta}{\gamma}\underline{b} + \frac{1}{\gamma}\underline{d}$ adódna, vagyis $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ következne. (2 pont)

Ezért $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, vagyis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ valóban igaz. (1 pont)

c) Az állítás lehet igaz is és hamis is.

Legyen először V a szokásos (3 dimenziós) tér, legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a három tengelyirányú egységvektor, valamint legyen $\underline{d} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ igaz (hiszen $\underline{d} = 1 \cdot \underline{a}$). Továbbá $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesül (hiszen $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített sík vektorai). Ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás hamis (mert $\langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ által kifeszített sík vektorai). (2 pont)

Másodszor legyen $\underline{a}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ ugyanaz, mint a fenti példában, de legyen $\underline{b} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ változatlanul igaz és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is megint teljesül (mert $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ csak az $\underline{a}$ skalárszorosaiból áll). Ám ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás már igaz (hiszen $\underline{b} = 1 \cdot \underline{a}$). (2 pont)

4. A t paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e olyan $\underline{y}$ sorvektor, amelyre $\underline{y} \cdot A = \underline{c}$ teljesül, ahol az A mátrix és a $\underline{c}$ sorvektor az alábbiak. Ha létezik ilyen $\underline{y}$, adjuk meg az összeset!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 7 \\ 25 & 19 & 16 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 20 & 16 & t \end{pmatrix}.$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója miatt $\underline{y}$ csak 4 hosszú sorvektor lehet. (1 pont)

Az $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ változókat bevezetve, ezekre az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 10 & 25 & 5 & 20 \\ 3 & 8 & 19 & -3 & 16 \\ 2 & 7 & 16 & -7 & t \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & t-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-14 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $t \neq 14$, akkor „tilos sort” kapunk, így nincs megoldás (és így a keresett $\underline{y}$ sem létezik). (2 pont)

Ha viszont $t = 14$, akkor a harmadik sor elhagyható és az elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a $t = 14$ esetben végtelen sok megoldás van: $\underline{y} = (-\alpha - 7\beta; 2 - 2\alpha + 3\beta; \alpha; \beta)$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméterek. (3 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Legyen egy parallelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0;1;-2)$, $B(1;1;5)$, illetve $C(1;3;-1)$. Határozzuk meg a parallelepipedon térfogatát!

* * * * *

A tanult tétel szerint az $\overrightarrow{OA}(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}(1;1;5)$, $\overrightarrow{OC}(1;3;-1)$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata az alábbi determináns értéke (vagy annak abszolút értéke):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$ (3 pont)

Gauss-eliminációval számolva a következőket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$ (6 pont)

Így a parallelepipedon térfogata 2. (1 pont)

6. Legyen A egy 50×100-as (50 sorú és 100 oszlopú) mátrix. Tegyük fel, hogy bárhogyan is választjuk a $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ vektort, mindig található olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^{100}$ vektor, amelyre $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Határozzuk meg A rangját!

* * * * *

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, (1 pont)
vagyis hogy $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100} \rangle = \mathbb{R}^{50}$. (2 pont)
Az anyagban szereplő tétel szerint $\mathrm{r}(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100} \rangle$. Így $\mathrm{r}(A) = \dim \mathbb{R}^{50}$. (3 pont)
Szintén ismert tény, hogy $\dim \mathbb{R}^n = n$, (2 pont)
amiből tehát $\mathrm{r}(A) = 50$. (2 pont)

Második megoldás.

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, (1 pont)
vagyis hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^{50}$-ben. (2 pont)
$\mathbb{R}^{50}$-ben minden lineárisan független rendszer legföljebb 50 elemű, hiszen ismert, hogy $\dim \mathbb{R}^{50} = 50$ (tehát van $\mathbb{R}^{50}$-ben 50 elemű generátorrendszer (sőt:bázis)). (1 pont)
Ezért $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{100}$ lineárisan összefüggő, így valamelyik $\underline{a}_i$ kifejezhető a többiből lineáris kombinációval. Tehát ezt az $\underline{a}_i$-t elhagyva a maradék 99 vektor is generátorrendszer $\mathbb{R}^{50}$-ben. (1 pont)
A fenti lépés még 49-szer megismételhető: mindaddig, amig a vektorok száma 50-nél több, valamelyik elhagyható úgy, hogy továbbra is generátorrendszert kapjunk. (1 pont)
Végül kapunk egy, az A 50 oszlopából álló generátorrendszert. Ez viszont már biztosan lineárisan független: ellenkező esetben a fenti lépés még egyszer megismételhető volna, kapnánk $\mathbb{R}^{50}$-ben egy 49 elemű generátorrendszert, ami lehetetlen (ismét azért, mert minden generátorrendszer elemszáma legalább akkora, mint bármely lineárisan független rendszeré és $\mathbb{R}^{50}$-ben bármely bázis 50 elemű lineárisan független rendszer). (1 pont)
Az oszloprang definíciójából tehát $\mathrm{r}(A) \geq 50$. (1 pont)
Azonban $\mathrm{r}(A) \leq 50$ nyilvánvaló (hivatkozva vagy arra, hogy $\mathbb{R}^{50}$-ben nem lehet 50-nél több lineárisan független vektor, így az (oszlop)rang legföljebb 50, vagy pedig arra, hogy A 50 sorú, így a (sor)rangja legföljebb 50). (1 pont)
Tehát $\mathrm{r}(A) = 50$. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. november 25..

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A}: V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel $\underline{b}_1 = 1 \cdot \underline{b}_1 + 0 \cdot \underline{b}_2$ és $\underline{b}_2 = 0 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2$, ezért $[\underline{b}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $[\underline{b}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Mivel $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, ezért a tanult tétel szerint $[\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{b}_1]_B = [\underline{b}_2]_B$, (3 pont)

vagyis $\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 pont)

Ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $1 \cdot p + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ és $1 \cdot q + 0 \cdot \sqrt{3} = 1$, vagyis $p = 0$ és $q = 1$. (1 pont)

2. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.
a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét!
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) A tanult tétel szerint $\lambda = 3$ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. (2 pont)

A fenti determinánst (például) az első sor szerinti kifejtéssel kiszámolva:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + p \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + p \cdot 1 = p + 1.$$ (2 pont)

Ezekből tehát $p + 1 = 0$, vagyis $p = -1$. (1 pont) b)Tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátérték, vagyis kereshetünk egy ehhez tartozó sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektort keresünk, melyre $A \cdot \underline{v} = 3 \cdot \underline{v}$. (1 pont)

Legyen $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ekkor a mátrixszorzás definíciója szerint (és a $p = -1$ értéket figyelembe véve) a $4x - z = 3x$, $5x + 7y + 7z = 3y$, $x + y + 5z = 3z$ feltételek adódnak. (2 pont)

Az első egyenletből $z = x$, ezt a másik két egyenletbe helyettesítve rendezés után mindkét esetben az $y = -3x$ egyenletet kapjuk. (1 pont)

Így sajátvektor lesz a $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ x \end{pmatrix}$ vektor minden $x \neq 0$ értékre. (1 pont)

Megjegyzés. A fenti megoldásban csak a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat határoztuk meg. További (kellemetlen, de nem nehéz) számolással megkapható a mátrix további két sajátértéke is: $\frac{13 \pm \sqrt{17}}{2}$. Ezekhez is tartoznak sajátvektorok, így elvileg a b) feladatnak további megoldásai is vannak. Azonban ezek meghatározása nyilván sokkal körülményesebb volna.

3. Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok halmazán (és az eredményt adjuk meg algebrai alakban)!

a) $(3 + 2i)^2$ b) $(1 + 17i) : (3 + i)$ c) $\sqrt[3]{-1000}$

* * * * *

a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$. (1 pont)

b)$\dfrac{1 + 17i}{3 + i} = \dfrac{(1 + 17i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \dfrac{3 - i + 51i - 17i^2}{9 - i^2} = \dfrac{20 + 50i}{10} = 2 + 5i$ (2 pont)

c) $-1000 = 1000(\cos \pi + i \sin \pi)$. (1 pont)

Így a tanult képlet szerint $\sqrt[3]{-1000} = 10 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \right) \right)$, ahol $k = 0, 1, 2$. (1 pont)

Ebből $k = 0$-ra $10 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 5 + 5\sqrt{3}i$, (2 pont)

$k = 1$-re $10 (\cos \pi + i \sin \pi) = -10$, (1 pont)

és $k = 2$-re $10 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 10 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 5 - 5\sqrt{3}i$ adódik. (2 pont)

4. Egy MIRNIXDIRNIX nevű országban furcsa szabályok szerint játsszák a lottót: egy szelvény kitöltése abból áll, hogy a játékos az ország nevének betűit összekeveri és valamilyen sorrendben leírja. (Így például egy lehetséges szelvény így nézhet ki: XIIRXMNDNIRI.) Az ország egyik lakója ezen a héten három szelvénnyel is szeretne játszani. Hányféleképpen töltheti ki a három szelvényt, ha arra azért szeretne vigyázni, hogy a szelvényei között ne legyen két ugyanolyan?

* * * * *

Egy szelvény kitöltésére a lehetőségek száma nem más, mint 4 db I, 2 db R, 2 db N, 2 db X, 1 db M és 1 db D elemekből készíthető ismétléses permutációk száma. (1 pont)

A tanult képlet szerint ez $\dfrac{12!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} =$ (2 pont)

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$. (1 pont)

Ha a feladatbeli lakó három szelvénnyel játszik, akkor a feladata nem más, mint a fenti számú – jelöljük ezt N-nel – lehetőségből kiválasztani három különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül. (2 pont)

Így az ismétlés nélküli kombinációra tanult képlet szerint a lehetőségek száma: $\dbinom{N}{3} =$ (1 pont)

$= \dfrac{N(N - 1)(N - 2)}{6}$. (3 pont)

5. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal)!

$$\log_2\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}\right]$$

* * * * *

$(1+1)^{101}$-et a binomiális tétellel kiszámítva: $2^{101}=\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{101}$. (2 pont)

Az $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ összefüggéstből: $\binom{101}{101}=\binom{101}{0}$, $\binom{101}{100}=\binom{101}{1}$, $\ldots$, $\binom{101}{51}=\binom{101}{50}$.(2 pont)

Ezt az 51 egyenlőséget a fentibe helyettesítve és összevonva:

$$2^{101}=2\cdot\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}\right].$$ (4 pont)

Ebből $\left[\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}\right]=2^{100}$, (1 pont)

Így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100. (1 pont)

Második megoldás.

A feladatbeli szögletes zárójelben álló összeg egy 101 elemű halmaz összes, legföljebb 50 elemű részhalmazát számlálja meg, az elemszám szerint vizsgálva, majd összeadva az eseteket. (2 pont)

A legföljebb 50 elemű részhalmazok párba állíthatók a legalább 51 eleműekkel: minden részhalmaz párja legyen a komplementere. (2 pont)

Ezért a legföljebb 50, illetve a legalább 51 elemű részhalmazok száma azonos. (2 pont)

A 101 elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^{101}, hiszen egy részhalmaz kiválasztásakor egymás után mind a 101 elemről kétféle döntés hozható: eleme lesz a részhalmaznak vagy sem. (2 pont)

A fentiekből $\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}=\frac{2^{101}}{2}=2^{100}$, (1 pont)

Így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100. (1 pont)

6. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

* * * * *

Ismert, hogy minden (legalább 2 pontú) fában van elsőfokú pont. Így az egyik fokszám 1. (1 pont)

Jelölje a másik fokszámot k.

A fában összesen $9+92=101$ csúcs van, így az éleinek száma (a tanultak szerint) 100. (2 pont)

Ezért a fában a fokszámok összege (az ismert összefüggés szerint) 200. (2 pont)

Először tegyük fel, hogy 9 db elsőfokú és 92 db k fokú pont van. Ekkor a fokok összege $92k+9$.(1 pont)

A $9+92k=200$ egyenletet megoldva k-ra nem egész szám adódik, így ez az eset nem lehetséges.(1 pont)

Ezért tehát 9 db k-adfokú és 92 db elsőfokú pont kell legyen a fában. Így a fokok összege $9k+92$.(1 pont)

A $9k+92=200$ egyenletből $k=12$ adódik. (1 pont)

Így a két előforduló fokszám: 1 és 12. (1 pont)

Megjegyzés. Valóban létezik olyan fa, amelyben 9 db 12 fokú és 92 db elsőfokú pont van. Ennek megmutatása elvileg hozzátartozna a feladat teljes értékű megoldásához, de nem jár pontlevonás azért, ha valaki ezt elmulasztja.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. december 6.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

1. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12;1;7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x-3=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest!

* * * * *

Jelölje az adott egyenest e, a keresett egyenest f.
e egy irányvektora $\underline{v}(1;3;-4)$, egy pontja $Q(3;2;-1)$. (1 pont)
A P-n átmenő, $\underline{v}$ normálvektorú S sík az e-vel vett M metszéspontja épp f és e metszéspontja. (3 pont)
S egyenlete felírható $\underline{v}$-ből és P-ből: $x+3y-4z=1\cdot 12+3\cdot 1+(-4)\cdot 7=-13$. (1 pont)
M az $x-3=\frac{y-2}{3}=\frac{-z-1}{4}$, $x+3y-4z=-13$ egyenletrendszer megoldásával kapható. (1 pont)
Kifejezve: $y=3x-7$, $z=-4x+11$; ezeket behelyettesítve és rendezve: $x=2$. Ebből $y=-1$, $z=3$.
Vagyis megkaptuk M-et: $M(2;-1;3)$. (1 pont)
f-nek $\overrightarrow{MP}$ irányvektora. Ez megkapható a P-be, illetve M-be mutató helyvektorok különbségeként: $\overrightarrow{MP}(10;2;4)$. (Ennek a fele is használható irányvektornak: $(5;1;2)$.) (1 pont)
Az irányvektor és P (vagy M) segítségével felírható f: $\frac{x-12}{5}=y-1=\frac{z-7}{2}$. (Vagy ugyanez M-et használva: $\frac{x-2}{5}=y+1=\frac{z-3}{2}$.) (2 pont)
Megjegyzés. A feladat a következő ötlettel is megoldható. A fenti megoldás jelöléseit használva, legyen $\underline{v}_0$ a $\underline{v}$-vel azonos irányú, egység hosszú vektor. (Azaz $\underline{v}_0=(1/\sqrt{26})\cdot\underline{v}$.) Ekkor a $\underline{v}_0\cdot\overrightarrow{QP}$ skaláris szorzat értéke (definíció szerint) épp a $\overrightarrow{QM}$ vektor hossza. Így $(\underline{v}_0\cdot\overrightarrow{QP})\cdot\underline{v}_0=\overrightarrow{QM}$. Ebből pedig $\overrightarrow{QM}$, majd M könnyen meghatározható.

2. Legyen V (tetszőleges) vektortér és $W\le V$ egy altér V-ben. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a V vektorai, amelyekre $\underline{a}\in W$, $\underline{b}\notin W$, $\underline{c}\notin W$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:
(i) az állítás biztosan igaz;
(ii) az állítás biztosan hamis;
(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V, W, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ választásától függően).
a) $2\underline{c}\in W$ b) $\underline{a}+\underline{b}\in W$ c) $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}\in W$

* * * * *

a) Az állítás biztosan hamis. Ugyanis ha $2\underline{c} \in W$ igaz volna, akkor $\frac{1}{2}(2\underline{c}) = \underline{c} \in W$ is igaz kellene legyen, mert W altér, így zárt a skalárral való szorzásra. Azonban $\underline{c} \notin W$. (3 pont)
b) Ez az állítás is biztosan hamis. Ugyanis $-\underline{a} = (-1) \cdot \underline{a} \in W$, ismét mert W zárt a skalárral való szorzásra. (1 pont)
Ha tehát $\underline{a} + \underline{b} \in W$ igaz volna, akkor $-\underline{a} + (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{b} \in W$ is igaz kellene legyen, mert W altér, így zárt az összeadásra. Azonban $\underline{b} \notin W$. (2 pont)
c) Az állítás lehet igaz is és hamis is.
Legyen például V a síkvektorok szokásos vektortere és W az x-tengelyre eső vektorok halmaza.(1 pont)
Ekkor W valóban altér (mert zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra; de előadáson is elhangzott, hogy a sík origón átmenő egyenesei alteret alkotnak). (1 pont)
Legyen először $\underline{a} = (1,0)$, $\underline{b} = (0,1)$, $\underline{c} = (0,-1)$. Ekkor $\underline{a} \in W$, $\underline{b} \notin W$, $\underline{c} \notin W$ igazak és $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} \in W$. (1 pont)
Másodszor legyen $\underline{a} = (1,0)$, $\underline{b} = (0,2)$, $\underline{c} = (0,-1)$. Ekkor $\underline{a} \in W$, $\underline{b} \notin W$, $\underline{c} \notin W$ megint igazak, de $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = (1,1) \notin W$. (1 pont)

3. A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldható-e és ha igen, adjuk meg az összes megoldását!

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 3x_4 + 8x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 10x_5 &= 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 8x_5 &= 21 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 8x_4 + p \cdot x_5 &= 22 \end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 6 & 10 & 17 \\ 3 & 2 & 7 & 12 & 8 & 21 \\ 2 & 4 & 10 & 8 & p & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & -16 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & p-16 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & p-8 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right)$$ (2 pont)

Ha $p = 0$, akkor az utolsó sor elhagyható. Ekkor a Redukált Lépcsős Alakot egyetlen további lépéssel (az első sorbeli 3-as „kinullázásával”) kapjuk: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$ (3 pont)
Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_1 = 1 - 20\beta - \alpha$, $x_2 = 3 + 2\beta - 2\alpha$, $x_5 = 1 + 4\beta$. (2 pont)
Ha viszont $p \neq 0$, akkor az utolsó sor p-vel osztásával és a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (4 darab) „kinullázásával” kapjuk a Redukált Lépcsős Alakot: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ (1 pont)
Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_1 = 1 - \alpha$, $x_2 = 3 - 2\alpha$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

4. Az alábbi determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

a) Ha az első sorból az 1-est választanánk, akkor a második oszlopból több elemet már nem vehetnénk; így a második sorból a 4-est kellene választanunk, a harmadikból pedig már csak 0-t vehetnénk.(2 pont)
Így az első sorból a 2-est vesszük. Ha a másodikból a 3-ast, akkor a harmadikból a 6-ost kell; ha a másodikból a 4-est, akkor a harmadikból az 5-öst kell. Mindkét esetben a negyedikből csak a 7-est vehetjük. (2 pont)
Így két nemnulla szorzat keletkezik: $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$ és $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$. (1 pont)
b) A 3-ast tartalmazó szorzathoz tartozó permutáció a 4,2,3,1 (hiszen az első sorból a 4. elemet vesszük, a másodikból a 2-at, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 5 (hiszen a 4 inverzióban áll az összes többi elemmel, ezen kívül még a 2 és a 3 az 1-gyel). (2 pont)
Mivel az inverziószám páratlan, a $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$ szorzat előjele negatív. (1 pont)

5. Határozzuk meg azt az A mátrixot, amelynek az inverze az alábbi B mátrix!

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Ha $A^{-1} = B$, akkor $B^{-1} = A$; a feladat tehát B^{-1} meghatározása. (2 pont)
Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(6 pont)}$$

Így A nem más, mint a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (2 pont)

Minden számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = 1 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az (a $B^{-1} = A$-ért járó 2 ponton felül további) 2 pontot ér. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 1-2 pontot érhet.

6. A nullmátrixtól különböző, tetszőleges A mátrix rangját jelölje r. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $A_1, A_2, \ldots, A_r$ mátrixok, amelyek mind 1 rangúak és amelyekre $A_1 + A_2 + \ldots + A_r = A$.

* * * * *

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$. Válasszunk ezek közül r lineárisan függetlent; az egyszerűség kedvéért legyenek ezek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ (az oszlopok sorrendjének ugyanis nincs jelentősége). (1 pont)
Ha $\underline{a}_j$ a választottaktól különböző oszlop, akkor $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_j$ már lineárisan összefüggő (hisz r-nél több lineárisan független oszlop A-ból nem választható). (1 pont)
Ezért (a tanult lemma szerint) $\underline{a}_j$ kifejezhető $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ segítségével lineáris kombinációval.(1 pont)
Ugyanez természetesen magukról az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ oszlopokról is elmondható. (1 pont)

Jelölje ezért $\alpha_{i,j}$ az $\underline{a}_i$ fenti kifejezésében az $\underline{a}_j$ együtthatóját, minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq r$ esetén.
Készítsük el minden $1 \leq j \leq r$ esetén az A_j mátrixot a következőképp: minden $1 \leq i \leq n$ esetén az A_j-beli i-edik oszlop legyen $\alpha_{i,j} \cdot \underline{a}_j$. (2 pont)
Ekkor A_j rangja valóban 1, hiszen minden oszlopa $\underline{a}_j$ skalárszorosa, így bármely két oszlopa már lineárisan összefüggő. (2 pont)
Továbbá az $A_1+A_2+\ldots+A_r$ mátrix i-edik oszlopában minden $1 \leq i \leq n$ esetén épp az $\underline{a}_i$ előállításához szükséges lineáris kombináció alakul ki, így $A_1 + A_2 + \ldots + A_r = A$ valóban igaz. (2 pont)

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

1. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1; 2; 3)$, $\underline{b}_2 = (2; 3; 4)$ és $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3; 6; 5)$!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Mivel $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 = 1 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_2 + 1 \cdot \underline{b}_3$, ezért $[\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3)]_B = [\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3]_B$, vagyis

$$[\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3)]_B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A szorzást elvégezve: $[\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1 pont)
Ebből tehát $\mathcal{A}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = 1 \cdot \underline{b}_1 + 1 \cdot \underline{b}_3$, (4 pont)
vagyis $(3; 6; 5) = (1; 2; 3) + \underline{b}_3$. (1 pont)
Ebből $\underline{b}_3 = (2; 4; 2)$. (1 pont)

2. Az (5×5)-ös A mátrix főátlójának minden eleme 2, a mátrix összes többi eleme 1.
a) Adjuk meg A egy sajátértékét!
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát!

* * * * *

a) Olyan λ értéket keresünk, amit a főátlóban álló 2-esekből kivonva (és a mátrix többi elemét érintetlenül hagyva) 0 determinánsú mátrixot kapunk. (1 pont)
Azonnal látszik, hogy $\lambda = 1$ sajátérték lesz, hiszen a főátlóban álló elemekből 1-et kivonva a „csupa 1” mátrixot kapjuk, aminek a determinánsa nyilván 0 (hiszen vannak azonos sorai). (3 pont)
b) Mivel tudjuk, hogy $\lambda = 1$ sajátérték, érdemes egy ehhez tartozó sajátvektort keresni. Olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ vektort keresünk tehát, amire $A \cdot \underline{v} = \underline{v}$. (1 pont)
Legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$; ekkor $A \cdot \underline{v} = \underline{v}$ egy 5 változós lineáris egyenletrendszer: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1$, $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_2$, $\ldots$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = x_5$. (2 pont)
Mivel rendezés után mind az 5 egyenlet az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ egyenletre vezet, (1 pont)
sajátvektor lesz a nullvektoron kívül minden olyan $\mathbb{R}^5$-beli vektor, amelyben a koordináták összege 0.
Például tehát sajátvektor $(1, -1, 0, 0, 0)^T$. (2 pont)

Megjegyzés. A $\lambda = 1$ mellett A-nak sajátértéke a $\lambda = 6$ is; valóban, a főátlóbeli 2-esekből 6-ot kivonva olyan mátrixot kapunk, amelyben az oszlopok összege $\underline{0}$, vagyis az oszlopok lineárisan összefüggők, így a determináns 0. A 6-hoz tartozó sajátvektorok (könnyen láthatóan) azok az $\mathbb{R}^5$-beli vektorok, amelyekben mind az 5 koordináta azonos (de nem 0). Azt sem túl nehéz megmutatni, hogy A-nak több sajátértéke nincs.

3. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is negatív!

$$\frac{5+3i}{3-5i} \cdot z^5 + 16 \cdot \sqrt{3} + 16i = 0$$

* * * * *

$\frac{5+3i}{3-5i} = \frac{(5+3i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{34i}{34} = i.$ (1 pont)
Ezt behelyettesítve, i-vel osztva és átrendezve: $z^5 = -16 + 16\sqrt{3}i$. (1 pont)
z tehát $\sqrt[5]{-16+16\sqrt{3}i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
$-16 + 16\sqrt{3}i = 32\,(\cos 120° + i \sin 120°)$. (2 pont)
Ebből $\sqrt[5]{-16+16\sqrt{3}i} = 2\,(\cos(24° + k \cdot 72°) + i \sin(24° + k \cdot 72°))$, $0 \le k \le 4$. (2 pont)
Ha a valós és a képzetes rész negatív, akkor a szög 180° és 270° között van. Ez csak a $k = 3$ esetben, a 240°-ra teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z = 2\,(\cos 240° + i \sin 240°) = -1 - \sqrt{3}i$. (2 pont)

4. Klappenkappe úr elfelejtette a jelszavát, csak a következőkre emlékszik:

1. A jelszó 9 karakterből áll, amelyek mindegyike az angol ábécé 26 betűjének valamelyike. (A jelszó csupa kisbetűből áll.)
2. A jelszóban pontosan 4 különböző féle betű szerepel.
3. A jelszó első 4 betűje között nincs ismétlődés.

(Ezek szerint Klappenkappe úr jelszava lehet például GRHXRRXGR.)

Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

A jelszót alkotó négyféle karakter kiválasztására a lehetőségek száma $\binom{26}{4} =$ (1 pont)
$= \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. (2 pont)
A 4 választott betűt $4! = 24$ féleképp állíthatjuk sorba, hogy a jelszó első 4 tagját megkapjuk.(1 pont)
A jelszó hátralévő része a 4 választott betűből álló 5 tagú (tetszőleges) sorozat, amire a lehetőségek száma $4^5 (= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$. (2 pont)
Mivel az első 4 karakterre vonatkozó $4!$ lehetőség mindegyikét folytathatjuk az utolsó 5 betűre vonatkozó 4^5 lehetőség bármelyikével, a lehetőségek száma (a 4 betű ismeretében) $4! \cdot 4^5$. (2 pont)
Hasonlóan, mivel a 4 betű kiválasztására vonatkozó $\binom{26}{4}$ lehetőség mindegyike esetében a jelszavak száma $4! \cdot 4^5$, ezért az összes jelszavak száma $\binom{26}{4} \cdot 4! \cdot 4^5$. (2 pont)

Megjegyzés. Valamivel egyszerűbben jutunk a megoldáshoz, ha így gondolkozunk: az első négy betűt $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ féleképp választhatjuk, majd a hátralévő 5 betű választására mindig 4 lehetőségünk van (az első négynek választott betűk valamelyike); így a lehetőségek száma $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 4^5$.

5. Adjuk meg az összes olyan 1 és 50 közötti n egészt, amelyre az alábbi egyenlet fennáll:

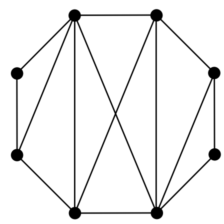
$$\binom{100}{2n}\binom{2n}{n} = \binom{100}{n}\binom{80}{n}$$

* * * * *

Az egyenlet bal oldalán álló első tag azt fejezi ki, hogy hányféleképp lehet 100 elemből $2n$-et választani (a sorrendre tekintet nélkül); a második tag pedig a $2n$ elem közül n kiválasztására vonatkozó lehetőségek száma. Képzelhetjük például úgy, hogy egy 100 fős évfolyamból egy versenyre két csapatot (az A-t és a B-t) választanak, mindkét csapat n fős, de mindenki legföljebb egy csapatban lehet tag. Ekkor a lehetőségek száma épp $\binom{100}{2n}\binom{2n}{n}$, hiszen a $2n$ darab csapattag kiválasztására vonatkozó $\binom{100}{2n}$ lehetőség mindegyikében $\binom{2n}{n}$ féleképp válaszhatjuk az A csapat tagjait (és ezek után a maradék n ember alkotja a B csapatot). (3 pont)
Ugyanezt a feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy először az A csapat tagjait választjuk ki (a lehetőségek száma $\binom{100}{n}$), majd a maradék $100-n$ ember közül választjuk a B csapat tagjait. Így (hasonló érveléssel) azt kapjuk, hogy a lehetőségek száma $\binom{100}{n}\cdot\binom{100-n}{n}$. (3 pont)
Mivel ugyanazt a feladatot oldottuk meg kétféleképp, az eredmények is egyenlők:
$\binom{100}{2n}\binom{2n}{n} = \binom{100}{n}\cdot\binom{100-n}{n}$. (1 pont)
Összevetve ezt a feladatbeli egyenlettel, azt kapjuk, hogy $\binom{100-n}{n} = \binom{80}{n}$. (1 pont)
Mivel nagyobb halmazból nyilván (szigorúan) többféleképp lehet azonos számú (n) elemet kiválasztani, azt kapjuk, hogy $100-n=80$, vagyis $n=20$ az egyetlen megoldás. (2 pont)

A feladat megoldható pusztán az $\binom{n}{k}$-ra vonatkozó képlet használatával is. Ha azonban a megoldó az egyenlet rendezése során csak azt ismeri fel, hogy $n=20$ kielégíti az egyenletet, de nem érvel amellett, hogy más n nem jöhet szóba, az 4 pont veszteséget jelentsen (mert ez a hiányosság pusztán a numerikus alakot látva nem volna könnyen pótolható). Ha azonban a megoldó a már (akár a fenti módon, akár számolással) bizonyított $\binom{100}{2n}\binom{2n}{n} = \binom{100}{n}\cdot\binom{100-n}{n}$ összefüggésből következtet (további indoklás nélkül) az $n=20$ megoldásra, az csak 2 pont veszteséget jelentsen (mert innen kiegészíteni a gondolatmenetet már jóval könnyebb).

6. Az ábrán látható gráf legyen G, a komplementerét jelölje $\overline{G}$.
a) Tartalmaz-e $\overline{G}$ a K_4-gyel izomorf részgráfot? (K_4 az a 4 csúcsú, egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs szomszédos.)
b) Izomorf-e G és $\overline{G}$?



* * * * *

a) $\overline{G}$ pontosan akkor tartalmaz K_4-gyel izomorf részgráfot, ha G-ben található 4 olyan pont, amelyek közül semelyik kettő nem szomszédos. (2 pont)
Ilyen 4 pont azonban G-ben jól láthatóan nem található: (1 pont)
valóban, a keresett pontok foka legföljebb 4 lehetne (hiszen egy ilyen pont önmagán kívül még három másikkal sem szomszédos). Mivel a G-beli két 4 fokú pont egymással szomszédos, ezek közül is csak egy volna választható. Így a hiányzó három pontot a legföljebb 3 fokúak közül kellene választani, azonban ez lehetetlen: ezek között van két diszjunkt él, így hármat választva közülük szomszédosak is lennének köztük. (2 pont)
b) G jól láthatóan tartalmaz K_4-gyel izomorf részgráfot: a rajzon a 4 „középső” pont közül bármely kettő szomszédos. (2 pont)
Mivel az imént láttuk, hogy $\overline{G}$-re ez nem igaz, a két gráf nem izomorf. (3 pont)
A pontozásbeli első 2 pont azért is megadható, ha valaki (helyesen) felrajzolja $\overline{G}$-t. (De természetesen a rajzért és a fenti megállapításért együtt sem adható 2 pontnál több.) Nem jár pont annak megmutatásáért, hogy G-ben és $\overline{G}$-ben a pontok fokai azonosak (kivéve, ha ez abból a célból történik, hogy a megoldó G és $\overline{G}$ nem izomorf voltát belássa).