Bevezetés a számításelméletbe I.
1. zárthelyi, 2009.10.20.

1. Írjuk fel a tér $P = (0, 2, 4)$ és $Q = (6, -2, 2)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét.

2. Tekintsük az $x + 2y + 3z = 14$, a $2x + 6y + 10z = 24$ és a $4x + 2y + tz = 68$ egyenletekkel megadott síkokat a szokásos háromdimenziós térben, ahol t tetszőleges valós paraméter. Határozzuk meg (t minden lehetséges értékére) a tér összes olyan pontját, amely e három sík mindegyikén rajta van.

3. Igaz-e, hogy a nem invertálható kétszer kettes mátrixok vektorteret alkotnak a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletére nézve?

4. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

5. Legyen M az az n-szer n-es mátrix, melynek főátlójában minden elem 0-val, főátlóján kívül pedig minden elem 1-gyel egyenlő. Határozuk meg M determinánsát.

6. Legyen A olyan 3 sorból és 5 oszlopból álló mátrix, amiben az utolsó három oszlop által alkotott négyzetes részmátrix determinánsa nem nulla. Igaz-e, hogy ekkor mindig létezik olyan B mátrix, amivel A-t jobbról megszorozva egységmátrixot kapunk?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.

Bevezetés a számításelméletbe I.
2. zárthelyi
2009.11.24.

1. Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a c valós érték függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1,2),\ (1,0)\}$ bázisban.

3. (a) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbf{R^3}$-nek (a szokásos háromdimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere megegyezik?

   (b) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbf{R^4}$-nek (a négydimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere megegyezik?

4. Bizonyítsuk be, hogy az x vektor akkor és csak akkor sajátvektora az A invertálható mátrixnak, ha sajátvektora A^{-1}-nek.

5. Adjuk meg kanonikus alakban a $z^7 - 27z = 0$ egyenlet összes olyan komplex megoldását, melynek valós és képzetes része is nemnegatív.

6. Hány olyan 99 hosszú sorozat készíthető az a, b, c, d, e betűkből, amelyben nincsenek sem szomszédos magánhangzók, sem szomszédos mássalhangzók?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra kérjük felírni a következő adatokat: a hallgató neve, neptunkódja, gyakorlatvezetőjének neve, illetve hogy szerdai vagy csütörtöki gyakorlatra jár-e.

Bevezetés a számításelméletbe I.
ELSŐ zárthelyi pótlása
2009.12.01.

1. Adjuk meg az összes olyan c értéket, melyre az $x = t+1$, $y = t+2$, $z = ct + 3$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenes döfi az $x + y + z = 3$ egyenletű síkot.

2. Állapítsuk meg, hogy vektorteret alkotnak-e azok a 3×3-as mátrixok, melyekben

   (a) a főátló minden eleme 0;

   (b) legalább három elem 0.

3. Legyen az a, b, c vektorrendszer lineárisan független egy V vektortérben. Igaz-e, hogy ekkor az $a+b, b+c, c+a$ rendszer is biztosan lineárisan független V-ben?

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden lehetséges értékére.

   $2x + 4y + 6z = 6$

   $2x + 5y + cz = 6$

   $3x + 6y + 10z = 7$

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, amire $detA \neq 0$, B pedig tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Igaz-e, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, melyre $AX = B$?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe I.
MÁSODIK zárthelyi pótlása
2009.12.01.

1. Legyen $\mathcal{A}$ a szokásos háromdimenziós tér olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbf{R^3}$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

2. Legyen $\mathcal{B} : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ lineáris transzformáció. Az $(1,1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4,3)$ vektor, az $(1,0)$ képe pedig a $(-1,2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a szokásos bázisban.

3. Egy 10×10-es mátrix első hat sorában az első öt elem (összesen tehát 30 elem) 0. Megadható-e a többi elem úgy, hogy a mátrix rangja 10 legyen.

4. Adjuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort is.
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban.
$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i$$

6. Hány olyan hétjegyű szám létezik, melyben legalább kétféle különböző számjegy szerepel és ezek egyike sem a 0?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe I.
ELSŐ zárthelyi pótlása
2009. december 16.

1. Adjuk meg az összes olyan (b, c) értékpárt, amire az $x = t + 1$, $y = t+b$, $z = ct+3$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenes párhuzamos az $x + y + z = 3$ egyenletű síkkal, de nincsen benne ebben a síkban.

2. Állapítsuk meg, hogy vektorteret alkotnak-e (az azonosan nulla polinommal együtt) azok a legfeljebb hatodfokú polinomok, melyeknek egyik gyöke a $\sqrt{2}$.

3. Legyen az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer lineárisan független egy V vektortérben. Igaz-e, hogy ekkor az $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ rendszer is biztosan lineárisan független V-ben?

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

   $x + 2y + 3z = 11$

   $3x + 2y + z = 9$

   $x + 3y + 2z = 11$

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Tegyük fel, hogy az A, B, C $n \times n$-es mátrixok mindegyikének van inverze. Igaz-e, hogy ekkor az ABC szorzatmátrix is invertálható? Igaz-e az állítás megfordítása, vagyis, abból, hogy ABC invertálható, következik-e, hogy A, B és C mindegyike külön-külön invertálható?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.

Bevezetés a számításelméletbe I.
MÁSODIK zárthelyi pótlása
2009. december 16.

1. A sík egy lineáris transzformációja az $(1, 1)$ vektort a $(2, 2)$ vektorba, az $(1, -1)$ vektort a $(0, 1)$ vektorba viszi. Adjuk meg a $(-1, 2)$ vektor képét ugyanezen transzformáció szerint. (A fentieket végig a szokásos bázisban értjük, a $(-1, 2)$ vektor képe is ebben adandó meg.)
2. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, amelynek a magtere kétdimenziós.
3. Számítsuk ki a következő mátrix rangját:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
4. Bizonyítsuk be, hogy egy A négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor sajátértéke a 0, ha $\det A = 0$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy z komplex szám 100-adik hatványa valós, akkor a konjugáltjának 100-adik hatványa is valós.
6. Egy tízfős társaságot két öt fős csapatra szeretnénk osztani, majd mindkét ötös csoporton belül kijelölni egy cserejátékost. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 24. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét.