**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok**
2008. október 21.

**1.** Legyen adott a térben az $\underline{a} = (2, 5, 1)$ és a $\underline{b} = (1, -1, 3)$ vektor. Döntsük el, hogy az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ generált altér egyenest vagy síkot határoz-e meg és írjuk fel a kapott geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét.

**2.** Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ egy (tetszőleges) $V$ vektortér vektorai. Vezessük be az $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$, $\underline{u}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, $\underline{u}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3$, $\ldots$, $\underline{u}_n = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \ldots + \underline{v}_n$ vektorokat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok is lineárisan függetlenek.

**3.** Határozzuk meg az összes olyan $Y$ mátrixot, amelyre $Y \cdot A = B$ teljesül, ahol az $A$ és $B$ mátrixok az alábbiak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 11 \\ -3 & -7 & 12 & -11 \\ 5 & 7 & -18 & 22 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

**4.** Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának.

**5.** Számítsuk ki az alábbi $A$ mátrix 2008-adik hatványát (vagyis annak a 2008 tagú szorzatnak az értékét, amelyben minden tényező $A$).

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**6.** Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi $A$ mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki $A$ inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok**
2008. november 25.

**1.** Legyen adott az $\mathcal{A} : V \to W$ lineáris leképezés és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázis $V$-ben, valamint a $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_m\}$ bázis $W$-ben. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{A}$ leképezés $B$ és $C$ bázisok szerint felírt mátrixának minden sorában az elemek összege 1, akkor $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_m \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

**2.** a) Döntsük el az alábbi $A$ mátrixról és $\underline{v}$ vektorról, hogy $\underline{v}$ sajátvektora-e $A$-nak!

b) Döntsük el az alábbi $A$ mátrixról, hogy $\lambda = 2$ sajátértéke-e $A$-nak!

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -1 \\ 9 & 5 & -5 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**3.** Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív.

$$i \cdot z^6 = (7+i)^2 + \frac{2-30i}{1-i}$$

**4.** Tegyük fel, hogy a $z$ komplex számra teljesül, hogy $z$ képzetes része nem 0, de a $z + \dfrac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg $z$ abszolút értékét, $|z|$-t!

**5.** Egy kisváros önkormányzati képviselőtestülete 20 fős. Aktuális problémák kezelésére szeretnének 5 darab, egyenként 4 fős bizottságot felállítani.

a) Hányféleképp állíthatják össze a bizottságokat?

b) Hányféleképp állíthatják össze a bizottságokat akkor, ha szeretnék biztosítani, hogy a polgármester (aki egyike a 20 képviselőnek) legalább az egyik bizottságnak tagja legyen?

(A bizottságokra nézve semmilyen egyéb megkötés nincs; így egy képviselő több bizottságnak is tagja lehet és két bizottság állhat akár ugyanazokból a tagokból is.)

**6.** Létezik-e olyan $G$ egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy $G$-nek 25-tel több páros fokú pontja van, mint $G$ komplementerének, $\overline{G}$-nek? ($\overline{G}$-ben két csúcs definíció szerint akkor és csak akkor szomszédos, ha $G$-ben nem szomszédosak.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2008. december 2.

**1.** Döntsük el, hogy a térben egy síkba esnek-e az $A(2;-1;1)$, $B(4;-2;-1)$, $C(-6;-11;2)$ és a $D(10;15;3)$ pontok.

**2.** A $p$ valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\11\\13\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\15\\12\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-19\\4\\19\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{d}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\-5\\p\end{pmatrix}.$$

**3.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy $V$ vektortérnek adott egy (véges sok vektorból álló) generátorrendszere, akkor ennek vektorai közül kiválasztható néhány (esetleg mind) úgy, hogy a kiválasztott vektorok bázist alkotnak $V$-ben.

**4.** Számítsuk ki az alábbi $A$ mátrix determinánsát!

$$A=\begin{pmatrix}0&3&4&5\\2&0&4&5\\2&3&0&5\\2&3&4&0\end{pmatrix}$$

**5.** Számítsuk ki az alábbi $A$ mátrix 2008-adik hatványát (vagyis annak a 2008 tagú szorzatnak az értékét, amelyben minden tényező $A$).

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\3&7&-3\\8&16&-7\end{pmatrix}$$

**6.** Legyen $A$ egy $(101\times101)$-es mátrix. Jelölje $B$ az $A$ első 51 oszlopából álló mátrixot és jelölje $C$ az $A$ utolsó 51 oszlopából álló mátrixot. Határozzuk meg $A$-nak az 51-edik oszlopát, ha tudjuk, hogy $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)+\mathrm{r}(C)$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2008. december 2.

**1.** Legyen adott a 3 dimenziós $V$ vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $V$-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a $B$ bázis szerint az alábbi $A$ mátrix. Milyen $p$ paraméterek esetén teljesül, hogy $3\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

**2.** Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a legkisebb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt{7} & 2 & \sqrt{5} \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**3.** Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív.

$$\frac{7i+3}{7-3i} \cdot z^4 + 8(\sqrt{3}+i) = 0$$

**4.** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán! (Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.)

$$z^2 + (1+i)\overline{z} + 4i = 0$$

**5.** Knoblauch úr elfelejtette a jelszavát és most szeretné kitalálni. A következőkre emlékszik:

1. A jelszó 11 karakterből áll, amelyek mindegyike az A, B, C, D, E és F betűk valamelyike.
2. A fenti hat betű közül az egyik 3-szor ismétlődik; három olyan betű van, ami kétszer ismétlődik, a többi kettő pedig csak egyszer szerepel a jelszóban.

(Ezek szerint Knoblauch úr jelszava lehet például DCABDFFEDBA.) Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

**6.** Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével! (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak. A komplementerben két csúcs definíció szerint akkor és csak akkor szomszédos, ha az eredeti gráfban nem szomszédosak.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2008. december 16.

**1.** A $p$ valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy a $4x + 3y + p \cdot z = 7$ egyenletű sík merőleges az $A(1;3;1)$ és a $B(3;8;2)$ pontokat összekötő egyenesre?

**2.** Legyen $V$ a $2 \times 2$-es mátrixok halmaza. Legyen $V$-n a $\oplus$ művelet a mátrixok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $V$-beli mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & b \\ c & \lambda \cdot d \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e $V$ az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

**3.** Döntsük el, hogy az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^3$ vektorok

a) lineárisan függetlenek-e;

b) generátorrendszert alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

**4.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1002 & 1003 & 1005 & 1006 \\ 1003 & 1005 & 1006 & 1002 \\ 2005 & 2007 & 2009 & 2011 \\ 2011 & 2005 & 2007 & 2009 \end{vmatrix} \neq 2008.$$

**5.** Döntsük el, hogy van-e inverze az alábbi mátrixnak; ha van inverz, határozzuk is meg!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

**6.** Tegyük fel, hogy az $A$ és $B$ mátrixok sorainak száma megegyezik és $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(B)$. Bizonyítsuk be, hogy $B$-nek kiválasztható egy alkalmas oszlopa úgy, hogy ezzel az oszloppal az $A$-t kiegészítve a keletkező $A'$ mátrixra $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(A')$ teljesüljön!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

**Bevezetés a számításelméletbe I.**

**Zárthelyi feladatok** — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2008. december 16.

**1.** Legyen adott a 3 dimenziós $V$ vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $V$-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a $B$ bázis szerint az alábbi $A$ mátrix. Igaz-e a $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Határozzuk meg a $p$ valós paraméter értékét, ha tudjuk, hogy $\lambda = 1$ sajátértéke az alábbi $A$ mátrixnak! Határozzuk meg $A$ összes sajátértékét és a legnagyobbhoz keressünk egy sajátvektort!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & p \end{pmatrix}$$

**3.** Végezzük el az alábbi műveletet és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$\sqrt[3]{\frac{56 - 8i}{1 + 7i}}$$

**4.** A $z$ komplex számról tudjuk, hogy $|z| = 1$ és hogy a $z - i \cdot z$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg $z^8$ értékét!

**5.** Knackwurst úr elfelejtette a jelszavát és most szeretné kitalálni. A következőkre emlékszik:

1. A jelszó 7 karakterből áll, amelyek mindegyike vagy az angol ábécé 26 betűjének valamelyike, vagy pedig egy (0 és 9 közötti) számjegy.
2. A jelszó 4 különböző betűt és 3 különböző számjegyet tartalmaz.
3. A 3 számjegy a jelszóban egymás mellett áll.

(Ezek szerint Knackwurst úr jelszava lehet például QYT713P.) Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

**6.** Egy szabályos kilencszögnek húzzuk be az összes legrövidebb (vagyis a kilencszögben másodszomszédos csúcsokat összekötő) átlóját. Igaz-e, hogy az így kapott (9 csúcsú és 18 élű) gráf izomorf a saját komplementerével?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.