Bevezetés a számításelméletbe I.

1. ZH 2007. 10. 24. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legyen A tetszőleges rögzített $n \times n$-es mátrix. Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral való szorzásra azok az $n \times n$-es X mátrixok, melyekre teljesül, hogy $AX = \underline{\underline{0}}$ (ahol $\underline{\underline{0}}$ az $n \times n$ méretű csupa 0-kból álló mátrixot jelöli)?

2. Határozzuk meg az $5x + 2y + z = 4$ és $2x + y - 3z = 3$ síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

3. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $< \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 >$ altér?

4. Adjuk meg az alábbi két három ismeretlenes, három egyenletből álló egyenletrendszer közös megoldásait.
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ 3x + 2y - z &= 6 \\ 4x - y + 3z &= 9 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 4y + 8z &= 11 \\ x + y + 2z &= 6 \\ -x + 3y + 9z &= 19 \end{aligned}$$

5. Legyen σ az $1, 2, \ldots, 100$ számok egy permutációja, és legyen σ' az a permutáció, amire $\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) + 1, & \text{ha } 1 \le \sigma(i) \le 99 \\ 1, & \text{ha } \sigma(i) = 100 \end{cases}$. Igazoljuk, hogy a σ és σ' permutációk $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ inverziószámai ellenkező paritásúak.

6. Legyen A olyan 40×40 méretű mátrix, aminek a bal felső 18×23-as részmátrixában csupa 0 áll. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$.

7. A c paraméter mely valós értékére lesz az alábbi mátrix determinánsa minimális?
$$\begin{pmatrix} c^2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Friedl Katalin (IB 138 K és Sz), Szabó Réka (IB 139 K és Sz), Tóth Géza (IB 140 K és Sz), Schlotter Ildikó (IB 141 K és Sz), Bohák András (IB 142 Sz), Szatmári Zoltán (IB 145 Sz), Fleiner Tamás (IB 146 Sz), Richlik György (IB 145 K és V2 716, Sz), Németh Zoltán (IB 142 K), Wiener Gábor (IB 146 K), Szeszlér Dávid (IB 134 Sz)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. ZH 2007. 11. 28. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & c \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. A c paraméter mely értékére lesz az $A \cdot A^T$ mátrix rangja 3?

2. Lineáris leképezés-e a sík vektorain az $\mathcal{A}$ megfeleltetés, amely az (x, y) koordinátájú vektorhoz a $(y, 3x)$ vektort rendeli?

3. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, és legyen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ a V tér egy bázisa. Tegyük fel, hogy b_1 a $\lambda_1 = 1$, b_2 a $\lambda_2 = 2$ és b_3 a $\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektora az $\mathcal{A}$ transzformációnak. Határozzuk meg az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzfromáció B bázishoz tartozó mátrixát! (Az $\mathcal{A}^2$ lineáris transzformációt az $\mathcal{A}^2(v) := \mathcal{A}(\mathcal{A}(v))$ formula definiálja.)

4. Melyek azok a véges dimenziós valós V vektorterek, melyeken létezik olyan $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció, amelyre $\dim \mathrm{Ker}\mathcal{A} = 2 \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$ teljesül?

5. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációnak a $\lambda = -1$ sajátértéke. Igaz-e, hogy a $\lambda = -1$ az $\mathcal{A}^3$ transzformációnak is sajátértéke?

6. Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységgyökök között?

7. Hány olyan (10-es számrendszerben felírt) hétjegyű egész szám létezik, melynek az első 4 számjegyéből képzett háromjegyű szám megegyezik az utolsó 4 számjegye alkotta számmal?

8. Hány olyan (10-es számrendszerben) 7-jegyű egész szám létezik, amely felírásában legalább kétféle jegy szerepel?

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Friedl Katalin (IB 138 K és Sz), Szabó Réka (IB 139 K és Sz), Tóth Géza (IB 140 K és Sz), Schlotter Ildikó (IB 141 K és Sz), Bohák András (IB 142 Sz), Szatmári Zoltán (IB 145 Sz), Fleiner Tamás (IB 146 Sz), Richlik György (IB 145 K és V2 716, Sz), Németh Zoltán (IB 142 K), Wiener Gábor (IB 146 K), Szeszlér Dávid (IB 134 Sz)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe I.

1. pótZH 2007. 11. 08. 18.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral szorzásra azok a 3×5-ös mátrixok, melyek bal szélső 3×3-as részmátrixának determinánsa 0?

2. Tekintsük az $A = (2, 1, 4)$, $B = (1, 1, 6)$, $C = (3, 0, 1)$, $D = (0, 1, 1)$, $E = (7, 1, 3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A, B és C, illetve C, D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát!

3. Tegyük fel, hogy $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a V vektortér egy bázisa, és legyen $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 + \underline{b}_4$. Mutassuk meg, hogy $\{\underline{b}_1 + \underline{b}, \underline{b}_2 + \underline{b}, \underline{b}_3 + \underline{b}, \underline{b}_4 + \underline{b}\}$ is bázis V-ben!

4. Milyen s, illetve t értékek mellett lesz az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása?
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ -3x + y - z &= 2 \\ x - y + 3tz &= 2s \end{aligned}$$

5. Legyen $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(100))$ az $1, 2, \dots, 100$ elemek egy permutációja. Definiáljuk σ'-t a következőképp:
$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i+1), & \text{ha } 1 \le i \le 99 \\ \sigma(1), & \text{ha } i = 100. \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ ellenkező paritásúak!

6. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

7. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét a c paraméter függvényében!
$$\begin{vmatrix} c & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2c \end{vmatrix}$$

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1} \cdot B^{-1}$ szorzatot!

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Friedl Katalin (IB 138 K és Sz), Szabó Réka (IB 139 K és Sz), Tóth Géza (IB 140 K és Sz), Schlotter Ildikó (IB 141 K és Sz), Bohák András (IB 142 Sz), Szatmári Zoltán (IB 145 Sz), Fleiner Tamás (IB 146 Sz), Richlik György (IB 145 K és V2 716, Sz), Németh Zoltán (IB 142 K), Wiener Gábor (IB 146 K), Szeszlér Dávid (IB 134 Sz)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe I.

2. pótZH 2007. 12. 05. 17.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, **gyakorlatvezetője nevét**, valamint a **gyakorlatának időpontját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az 5×5 méretű A mátrix rangja 5. Bizonyítsuk be, hogy az A első sorának elhagyásával keletkező mátrixnak van 4 rangú, 4×4 méretű részmátrixa.

2. Lineáris leképezés-e a sík vektorain az az $\mathcal{A}$ megfeleltetés, ami az (x, y) vektorhoz az (x^2, y^2) vektort rendeli?

3. Mi a mátrixa (a szokásos bázisban) a síkvektorok azon lineáris transzformációjának, amit úgy kapunk, hogy először az y tengelyre tükrözünk, majd az origóból egy 4-szeres nagyítást hajtunk végre, végül pedig az x tengelyre tükrözünk?

4. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a V vektortér lineáris transzformációi, és tegyük fel, hogy $\mathrm{Im}\mathcal{B} \cap \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. A V tér tetszőleges v vektorára definiálja $\mathcal{C}(v) := \mathcal{A}(\mathcal{B}(v))$ a $\mathcal{C}$ lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Ker}\mathcal{C} = \mathrm{Ker}\mathcal{B}$.

5. Legyen az $\mathbb{R}^2$ vektortér $\mathcal{A}$ lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg $\mathcal{A}$ sajátértékeit, és a legkisebb sajátértékhez találjunk egy sajátvektort!

6. Oldjuk meg a $2z + 3\overline{z} = 5 + 2i$ egyenletet a komplex számok körében!

7. Oldjuk meg a $(2 + i)z^3 = -9 + 3i$ egyenletet a komplex számok körében!

8. Hányféleképpen lehet 7 fiúból és 10 lányból 5 táncpartner-párt képezni, ha minden párnak egy fiúból és egy lányból kell állnia?

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Friedl Katalin (IB 138 K és Sz), Szabó Réka (IB 139 K és Sz), Tóth Géza (IB 140 K és Sz), Schlotter Ildikó (IB 141 K és Sz), Bohák András (IB 142 Sz), Szatmári Zoltán (IB 145 Sz), Fleiner Tamás (IB 146 Sz), Richlik György (IB 145 K és V2 716, Sz), Németh Zoltán (IB 142 K), Wiener Gábor (IB 146 K), Szeszlér Dávid (IB 134 Sz)

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe I.

ELSŐ ZH pótlása 2007. 12. 20. 11.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral szorzásra azok az 5×3-as mátrixok, melyek legalább 11 darab 0-t tartalmaznak?

2. Adjuk meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges az $x + 2y + 5z = 8$ egyenletű síkra és átmegy a $(2, 2, 3)$ ponton.

3. Egészítsük ki a szokásos háromdimenziós tér egy bázisává a $(3, 5, 2), (5, 2, 3)$ vektorrendszert.

4. Milyen a és b értékek mellett lesz pontosan két megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 8 \\ 4x + 2y - 2z &= 8 \\ 4x + 2y - az &= 9 \\ 4x + 2y - bz &= 10 \end{aligned}$$

5. Legyen σ az $1, 2, \ldots, 100$ számok egy permutációja, és legyen σ' az a permutáció, amire $\sigma'(i) = 101 - \sigma(i)$ Igazoljuk, hogy a σ és σ' permutációk $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ inverziószámai azonos paritásúak.

6. Határozzuk meg az $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ determináns értékét a λ paraméter függvényében.

7. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ méretű négyzetes A mátrix rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármelyik főátlóbeli $a_{i,i}$ elemére vagy az igaz, hogy $a_{i,i}$ alatt csak 0-k állnak vagy az igaz, hogy $a_{i,i}$-től jobbra csak 0-k állnak. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Legyen $X := A \cdot B^{-1}$ és $Y := B \cdot (A^{-1})^2$. Számítsuk ki az $X \cdot Y$ mátrix inverzét.

Jó munkát!

Bevezetés a számításelméletbe I.

MÁSODIK ZH pótlása 2007. 12. 20. 11.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és**NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel.
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy tekintetében a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

Feladatok

1. Egy 10×10 méretű A mátrix rangja 3. Mutassuk meg, hogy A-nak legalább 7 elemét kell megváltoztatnunk ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja 10 legyen.
2. Lineáris leképezés-e a 4×4 méretű valós felső háromszögmátrixokon az $M \mapsto \det M$ hozzárendelés? (Egy $n \times n$-es mátrix *felső háromszögmátrix*, ha a főátló alatt csupa 0 áll.)
3. A sík egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációjáról azt tudjuk, hogy az $(5, 3)$ vektor képe a $(2, 3)$ vektor, a $(4, 3)$ vektoré pedig a $(3, 2)$ vektor. Mi lesz a $(11, 6)$ vektor képe?
4. Legyenek U és V rendre az $(n + 1) \times n$ ill. $n \times (n - 1)$ méretű valós mátrixok alkotta vektorterek a szokásos műveletekre nézve, és legyen $\mathcal{A} : U \to V$ egy lineáris leképezés. Bizonyítsuk be, hogy $\dim \mathrm{Ker}\mathcal{A} \geq 2n$.
5. Tegyük fel, hogy valamely $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak az u, v és $u + v$ vektorok egyaránt sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy ekkor e három sajátvektor ugyanahhoz a sajátértékhez tartozik.
6. Oldjuk meg a $(\sqrt{3} - i)z^5 = 1$ egyenletet a komplex számok körében.
7. Igaz-e, hogy ha ε_1 n-dik és ε_2 k-dik egységgyök, akkor $\varepsilon_1\varepsilon_2$ is (valahányadik) egységgyök?
8. Hányféleképpen választhatunk az első száz pozitív egész közül két különbözőt úgy, hogy az összegük öttel osztható legyen?

Jó munkát!