Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2006. október 26.

1. Döntsük el, hogy a $P(2,7,3)$ és a $Q(6,3,5)$ pontokon átmenő egyenesen rajta van-e az $R(12,-3,8)$ pont!

2. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a V (tetszőleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ a nullvektortól különböző, tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén generátorrendszert alkotnak!

3. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned}
&-x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1\\
&5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 26x_4 = 4\\
&2x_1 + 6x_2 + c \cdot x_4 = 4\\
&4x_1 + 12x_2 + x_3 + (c+14) \cdot x_4 = 11
\end{aligned}$$

4. Legyen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $(n \times n)$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re a mátrix i-edik sorában a π_i-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a π_i-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát!

5. A (100×100)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (100×100)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

7. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli).

8. Az $(n \times n)$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2006. november 30.

1. Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektora.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!

b) Határozzuk meg A összes sajátértékét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & p \end{pmatrix}$$

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$(2i + 3)z^3 + 3i = 2$$

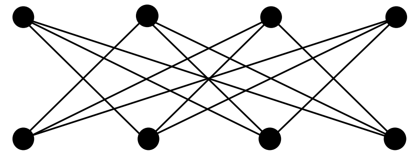
4. Határozzuk meg a z komplex számot, ha $z^n = 1$ és $z^m = z + 2$ teljesül valamely n és m pozitív egészekre.

5. Gondolatban írjuk fel növekvő sorrendben az összes olyan hatjegyű számot, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyek szerepelnek és minden számjegy éppen egyszer. Hányadik ebben a sorban az 512364?

6. Mutassuk meg, hogy fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\binom{100}{30} = \binom{10}{0}\binom{90}{30} + \binom{10}{1}\binom{90}{29} + \binom{10}{2}\binom{90}{28} + \ldots + \binom{10}{10}\binom{90}{20}$$

7. A G gráf csúcsai legyenek a 3 hosszúságú 0-1 sorozatok. Két csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két sorozat pontosan egy helyen különbözik. Izomorf-e G az alábbi ábrán látható gráffal?



8. A G gráfban minden pont foka legföljebb három. Tudjuk továbbá, hogy G minden köre legföljebb 5 élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G síkbarajzolható!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok
2006. november 9.

1. Döntsük el, hogy a $P(1,4,4)$ és a $Q(3,12,-2)$ pontokon átmenő egyenesen metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét! Ha a válasz igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t!

2. Legyen $V = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Értelmezzük V-n a $\oplus$ vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való $\odot$ szorzását a következőképpen: $u \oplus v = u + v + 1$ és $\lambda \odot v = \lambda \cdot v + \lambda - 1$. (A műveletek értelmezésében szereplő $+$ és $\cdot$ a valós számok szokásos összeadását és szorzását jelölik.) Döntsük el, hogy V vektorteret alkot-e a $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel!

3. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ a nullvektortól különböző, tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén lineárisan függetlenek!

4. Adjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer minden megoldását!

$$\begin{aligned}
2x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 &= 2\\
3x_1 + 15x_2 + 11x_3 + 6x_4 &= 8\\
5x_1 + 25x_2 + 13x_3 - x_4 &= 8\\
2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 4
\end{aligned}$$

5. Legyen az $n \times n$-es A mátrix determinánsa 1. Készítsük el A-ból az $n \times n$-es B mátrixot a következőképpen: válasszuk ki A két különböző sorát és mindkettőhöz adjuk hozzá a két kiválasztott sor különbségének 7-szeresét. Mennyi B determinánsának értéke?

6. A (100×100)-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A (100×100)-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

7. A c valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját!

$$A = \begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

8. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások tetszőleges $(m \times n)$-es A mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor esetén!

a) Ha A oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldható.

b) Ha A sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldható.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok
2006. december 7.

1. Az alábbi A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

a) Határozzuk meg a p paraméter értékét!

b) Határozzuk meg A egy sajátértékét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1,0)$ és $\underline{b}_2 = (1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre $\mathcal{A}$ az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét!

3. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek azt a komplex megoldását, amelynek a képzetes része a lehető legnagyobb.

$$(6-i)z^5 = (3i+1)^2 + 9$$

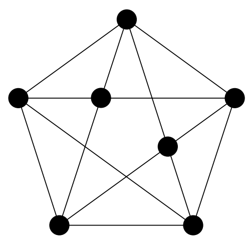
4. Határozzuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $|z+i| = 1$ és $|z-i| = \sqrt{5}$ teljesül.

5. A Mikulás egy kis faluban 20 gyereket látogat meg. A puttonyában 10 féle ajándék van, minden fajtából korlátlan mennyiség áll rendelkezésére. Minden gyereknek 3 (különböző) ajándékot ad. Hányféleképpen dönthet a Mikulás az ajándékokról?

6. Egy huszár áll egy 10×10-es sakktábla bal alsó mezőjén. Kétféle megengedett lépése van: egy lépésben vagy két mezőt halad jobbra és egyet fölfelé, vagy egy mezőt halad jobbra és kettőt fölfelé. Hányféleképpen juthat el a tábla jobb felső mezőjére?

7. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, akkor rajzoljuk le úgy, hogy minden éle egyenes szakasz legyen; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
GyakIV feladatok
2006. december 19.

1. Írjuk fel a $P(1,3,5)$ ponton átmenő és az $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{4}, z = 5$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!

2. Legyen V a síkvektorok halmaza. A síkvektorok összeadását értelmezzük a hagyományos módon, viszont a síkvektorok valós számmal szorzásának definícióját változtassuk meg: minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{v}$. (Vagyis minden vektor bármely számszorosa önmaga.) Vektorteret alkot-e V a most definiált műveletekkel?

3. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^4$ vektorok, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Az $n \times n$-es A_n mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló eleme $a_{i,j}$. Tudjuk, hogy $a_{i,i} = 1$ minden $1 \le i \le n$-re, $a_{i+1,i} = 1$ minden $1 \le i \le n-1$-re, valamint $a_{1,n} = 1$; a mátrix összes többi eleme 0. (Azaz a főátlóban, közvetlenül a főátló alatt és a jobbfelső sarokban áll 1-es, mindenhol máshol 0.) Milyen n-ek esetén van inverze az A_n mátrixnak?

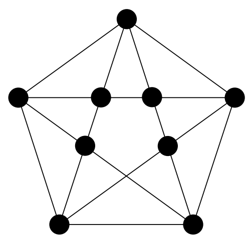
5. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ a V (tetszőleges) vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek nincs sajátértéke. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az $\mathcal{A}(\underline{v}_1) - 2\underline{v}_1, \mathcal{A}(\underline{v}_2) - 2\underline{v}_2, \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k) - 2\underline{v}_k$ vektorok lineárisan összefüggők. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok is lineárisan összefüggők!

6. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek azt a komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív!

$$2z^4 - 8 = (z^4 + 24)\sqrt{3} \cdot i$$

7. Hány olyan 9 jegyű (pozitív, egész) szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 számjegyekből, amelyekben mind a hét felsorolt számjegy szerepel?

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, akkor rajzoljuk le úgy, hogy minden éle egyenes szakasz legyen; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.