A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon'$ egy 100-adik egységgyök.

2. Legyenek $u, v \in \mathbb{R}^4$ tetszőleges vektorok. Vektorteret alkotnak-e (a szokásos műveletekre) azok a 3×4 méretű valós mátrixok, melyek meghatározta lineáris leképezések magtere tartalmazza az u és v vektorokat?

3. Hány dimenziós vektorteret generálnak a legfeljebb 5-ödfokú valós polinomok vektorterében a $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1$, a $q(x) = 2x^5 + 6x^3 + 4$ és az $r(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 1$ polinomok?

4. Legyen $\mathcal{A} : U \to V$ egy tetszőleges lineáris leképezés, és legyen W az U vektortér egy altere. Bizonyítsuk be, hogy ha $W \cap \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$, és $w_1, w_2, \ldots, w_k \in W$ lineárisan független vektorok U-ban, akkor az $\mathcal{A}(w_1), \mathcal{A}(w_2), \ldots, \mathcal{A}(w_k)$ vektorok lineárisan függetlenek V-ben.

5. Határozzuk meg a $21, 22, \ldots, 30, 11, 12, \ldots, 20, 1, 2, \ldots, 10$ permutáció inverziószámát! (A fenti permutáció úgy értendő, hogy i-hez a fenti sorozat i-edik elemét rendeljük, ahol $i = 1, 2, \ldots, 30$.)

6. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

   (a.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és főátlójának minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det A$ is 4-gyel osztható.
   (b.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első sorának minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det A$ is 4-gyel osztható.
   (c.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első és utolsó sorának minden eleme páros, akkor $\det A$ 4-gyel osztható.
   (d.) Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész, és első sorának és utolsó oszlopának minden eleme páros, akkor $\det A$ 4-gyel osztható.

7. Legyen $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})$. Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 3\varepsilon & 4\varepsilon & 2\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 & 3\varepsilon^2 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ determináns értékét!

8. Döntsük el, invertálhtató-e az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, adjuk meg az inverzét.

Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Oldjuk meg a $z^4 = z$ egyenletet a komplex számok körében!

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg a három koordinátatengellyel vett metszéspontjait annak a síknak, mely átmegy a $(3,4,5)$ ponton és merőleges az origóból a $(3,4,5)$ koordinátájú pontba mutató vektorra!

4. Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e az invertálható, (3×3)-as, valós mátrixok a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve!

5. Legyen V egy 100 dimenziós, valós vektortér, és legyen ennek $\mathcal{A} : V \to V$ egy olyan lineáris transzformációja, melyre $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) \geq \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ áll, és tetszőleges $v \in V$ vektorra $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathbf{0}$ teljesül. Határozzuk meg az $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ képtér dimenzióját!

6. Jelölje S_n az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációinak halmazát. Legyen $J(\sigma)$ azon párok száma, melyek nem állnak inverzióban a $\sigma \in S_n$ permutációban. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációhoz létezik egy olyan $\sigma' \in S_n$ permutáció, melyre $I(\sigma') = J(\sigma)$.

7. Határozzuk meg a $\begin{vmatrix} 20 & 40 & 10 & 70 & 40 & 23 \\ 30 & 0 & 50 & 60 & 11 & 30 \\ 20 & 40 & 10 & 77 & 40 & 20 \\ 40 & 40 & 99 & 30 & 30 & 30 \\ 40 & 45 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 11 & 30 & 30 & 30 & 30 & 50 \end{vmatrix}$ determináns 10-es számrendszerben felírt alakjának utolsó számjegyét!

8. Döntsük el, invertálható-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, és ha igen, határozzuk meg az inverzét!

Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.

Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.

Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

2. Mennyi a számossága a természetes számok 100-elemű részhalmazaiból álló halmaznak?

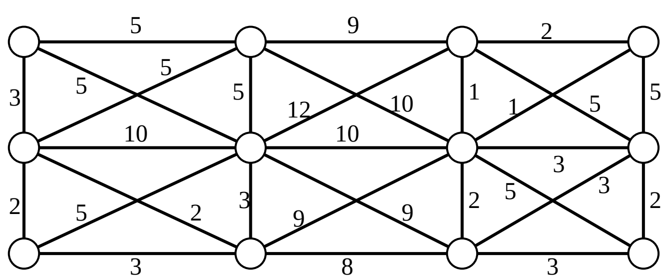
3. Egy 52-lapos, csupa különböző lapból álló kártyacsomagban összesen 4 ász található. Hányféleképpen osztható szét a csomag 4 különböző játékos között úgy, hogy mindegyik játékosnak ugyanannyi lap jusson, és mindegyik játékosnál legyen egy-egy ász?

4. Lehetséges-e, hogy G egy egyszerű, nem összefüggő, 10-csúcsú gráf, és a csúcsainak fokszámai rendre $7, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1$?

5. Hány elsőfokú csúcsa van annak az F fának, aminek $(2, 2, 5, 5, 7, 6, 7, 7, 1)$ a Prüfer-kódja? (Egy n-csúcsú fa Prüfer kódján itt egy $(n-2)$-hosszú sorozatot értünk.)

6. Hány különböző olyan feszítőfája van az $1, 2, 3, 4$ ill. 5 csúcscímkékkel ellátott K_5 teljes gráfnak, amiben az 1 címkéjű csúcs nem elsőfokú?

7. Mennyi az alábbi élsúlyozott gráfban a minimális súlyú feszítőfa súlya?



8. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ egy olyan egyszerű gráf, aminek E élhalmaza előáll az E_1, E_2, E_3 diszjunkt élhalmazok uniójaként. Utóbbiakra teljesül, hogy a $(V, E_1), (V, E_2)$ és (V, E_3) részgráfok mindegyike a G egy feszítőfája. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G nem síkbarajzolható.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok

Tóth Géza (H 10:15-11:45 és K 10:15-11:45, IB.138.), Koblinger Egmont (H 10:15-11:45, IB.139.), Németh Zoltán (H 10:15-11:45, IB.140.) Németh András (H 10:15-11:45 és K 10:15-11:45, IB.141.), Fleiner Tamás (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Richlik György (K 10:15-11:45 és Sz 12:15-13:45, IB.139.), Biró Péter (K 10:15-11:45 és Sz 12:15-13:45, IB.140.) Megyeri Csaba (Sz 12:15-13:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (Sz 12:15-13:45, IB.142.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

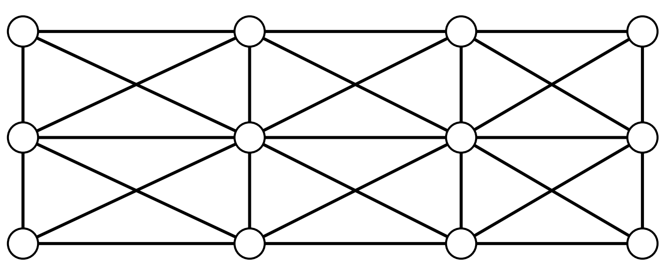
Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektortér $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrix által megadott lineáris transzformációját. Mennyi az A-hoz tartozó sajátvektorok számossága?
2. Hány olyan 5×5 méretű mátrix létezik, aminek minden eleme 0 vagy 1 és amiben minden sorösszeg és minden oszlopösszeg 4-gyel egyenlő, egy-egy sor- és oszlopösszegtől eltekintve, amik egyaránt 5-tel egyenlőek?
3. Hány olyan sorrendje van 5 piros, 5 fehér, 5 zöld és 5 kék golyónak, amiben az 5 kék golyó mindegyike az első tíz hely valamelyikén van?
4. Hány különböző k-pontú utat tartalmaz az n címkézett ponton megadott K_n teljes gráf? (Két utat akkor tekintünk azonosnak, ha ugyanazokat a csúcsokat és ugyanazokat az éleket tartalmazza.)
5. A 6-csúcsú G gráf pontjai közül 5-nek ismerjük a fokszámát. Ezek a fokszámok $4, 4, 2, 2, 1$. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!
6. Legyenek a G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_9$, és legyen a $v_i v_j$ él költsége $(i+j)$-vel egyenlő! Határozzuk meg G minimális súlyú feszítőfájának Prüfer-kódját!
7. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



8. Legyen G egy 13-pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere (tehát az a gráf, amiben két pont között pontosan akkor fut él, ha e pontok G-ben nem szomszédosak) közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.

Gyakorlatvezetők és gyakorlatok
Tóth Géza (H 10:15-11:45 és K 10:15-11:45, IB.138.), Koblinger Egmont (H 10:15-11:45, IB.139.), Németh Zoltán (H 10:15-11:45, IB.140.) Németh András (H 10:15-11:45 és K 10:15-11:45, IB.141.), Fleiner Tamás (Sz 12:15-13:45, IB.138.), Richlik György (K 10:15-11:45 és Sz 12:15-13:45, IB.139.), Biró Péter (K 10:15-11:45 és Sz 12:15-13:45, IB.140.) Megyeri Csaba (Sz 12:15-13:45, IB.141.), Patakfalvi Zsolt (Sz 12:15-13:45, IB.142.), Szeszlér Dávid (K 10:15-11:45, IB.142.)

Jó munkát!