1. Egy adott $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik elemét jelölje a_{ij}. Minden $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ esetén szorozzuk meg a_{ij}-t egy rögzített z komplex szám z^i hatványával. (Vagyis a kitevő ugyanaz, mint a_{ij} első indexe.) Hány különböző módon rögzíthető z úgy, hogy a fenti, összesen n^2 darab szorzás elvégzése után kapott $\mathbf{A}'$ mátrixra $\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}$ teljesüljön?

2. Oldjuk meg a komplex számok körében az alábbi egyenletrendszert!

$$x + 2y - z = 3$$
$$2x + y + w = 4$$
$$x - y + z + w = 1$$

3. Az $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ és a $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4}$ vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret, vagyis

$$< \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} >=< \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4} >= V.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő:

$\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} + \mathbf{b_1}, \mathbf{a_3} + \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3} + \mathbf{b_4}$.

4. Adjuk meg $\Re^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}.$$

5. Legyen V egy 37 dimenziós lineáris tér és $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezés. Jelölje $\mathcal{A}^2$ azt a lineáris leképezést, amit $\forall \mathbf{v} : \mathcal{A}^2(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{v}))$ definiál. Tegyük fel, hogy $\dim Im\mathcal{A}^2 = 7$. Mennyi ezen feltétel mellett $\dim Ker\mathcal{A}$ lehetséges legkisebb értéke?

6. Legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V_1 \to V_2$ lineáris leképezések, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ pedig e két leképezés mátrixa (a V_1 és V_2 vektorterek ugyanazon rögzített bázisaiban felírva). Igazoljuk, hogy

$$r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \dim(< Im\mathcal{A}, Im\mathcal{B} >),$$

ahol $< Im\mathcal{A}, Im\mathcal{B} >$ azt a legszűkebb lineáris teret jelöli, ami $Im\mathcal{A}$-t és $Im\mathcal{B}$-t is tartalmazza. ($\mathbf{A} + \mathbf{B}$ szokás szerint a két mátrix elemenkénti összeadásával kapott, $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{B}$-vel megegyező méretű, mátrixot jelöli.)

7. Jelölje $\mathbf{D}$ azt az n-szer n-es mátrixot, amiben a főátló alatt minden elem 0, a főátlóban és felette pedig minden elem 1. (Vagyis $d_{ij} = 0$, ha $j < i$ és $d_{ij} = 1$, ha $j \geq i$, míg $\mathbf{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^n$.) Adjuk meg a $\mathbf{D}$ mátrix inverzét!

8. Az alábbi determinánsban a, b, c és d valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

Bevezetés a számításelméletbe I.
2. zárthelyi, 2003. december 11.

1. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Hány olyan (végtelen hosszú) számtani sorozat van, amelynek minden eleme pozitív egész szám? (Vagyis, mi a számossága az ezen számtani sorozatokat tartalmazó halmaznak?)

3. Hány különböző olyan $n \times n$-es mátrix van, aminek minden eleme 0, 1, vagy 2, a főátlójában csupa egyforma elem áll, és ugyanez az elem a főátlón kívül máshol nem fordul elő?

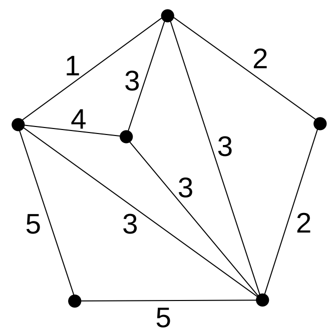
4. Egy fa Prüfer-kódja (az utolsó, "n" címkéjű elem leírása nélkül értelmezve a Prüfer-kódot):

   2353983

   Adjuk meg a fát!

5. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, amiben az "n" jelű pont elsőfokú?

6. Adjuk meg az alábbi élsúlyokkal megadott gráf összes minimális súlyú feszítőfáját!



7. Síkbarajzolható-e egy hét hosszúságú kör komplementere, vagyis az a G gráf, amire

$$V(G) = \{1, 2, \ldots, 7\}; \quad E(G) = \{\{i, j\} : 1 < |i - j| < 6\} \text{ ?}$$

8. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 5 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!

1. Adjuk meg az $(1-i)^{100}$ komplex szám valós és képzetes részét!

2. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletrendszert!

$$x + z + w = 4$$
$$2x + y - w = 2$$
$$3x + y + z = 7$$

3. Vektorteret adnak-e az alábbi valóselemű mátrixok a mátrixok szokásos (tehát elemenkénti) összeadására és valós számmal való szorzására nézve?

   a.)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \Re, a + b = 5 \right\}$$

   b.)
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b, c \in \Re, a + b = 0 \right\}$$

4. Legyen E lineáris tér és F_1, F_2 ennek alterei. Tudjuk, hogy $\dim E = 10, \dim F_1 = 5, \dim F_2 = 6$, és azt, hogy F_1 és F_2 elemei együtt generálják a teljes E vektorteret. Mennyi az $F_1 \cap F_2$ vektortér dimenziója?

5. Az $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

   a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő;

   b. Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\mathbf{0}$.

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$.

6. Legyen π az $1, 2, \ldots, 2003$ számok egy permutációja, és jelölje π' ennek megfordítását. (Tehát a π szerint az i-edik helyen álló elem azonos a π' szerint a $(2003 - i + 1)$-edik helyen álló elemmel.) Igaz-e tetszőleges π permutáció esetén, hogy π és π' inverziószáma különböző paritású?

7. Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

8. Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$-es (vagyis m sorból és n oszlopból álló), $\mathbf{B}$ pedig $n \times m$-es (vagyis n sorból és m oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mátrix nem invertálható.