Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2024. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Az $\mathbb{R}^4$-beli V altér álljon azokból a vektorokból, melyeknek x_1, x_2, x_3, x_4 koordinátáira teljesül, hogy $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Hozzá lehet-e venni a jobbra látható vektorokhoz néhány további vektort úgy, hogy bázist kapjunk V-ben? Ha igen, akkor hányat? (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy V valóban altér.)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Nyilván $\underline{u}, \underline{v} \in V$. (1 pont)
Az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorrendszer lineárisan független, mert a két vektor közül egyik sem skalárszorosa a másiknak. (1 pont)
Tehát a tanultak szerint az $\underline{u}, \underline{v}$ rendszer kiegészíthető V egy bázisává. (2 pont)
Tekintsük a $\underline{w} = (0, 0, 1, 1)^\top$ vektort. Megmutatjuk, hogy az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ rendszer V egy bázisa. Ehhez azt kell belátnunk, hogy ez a három vektor lineárisan független és V egy generátorrendszerét alkotja. (0 pont)
Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v} + \gamma \cdot \underline{w} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárokra. Behelyettesítve az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokat és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből $\alpha = 0$, amit a másodikba, illetve a negyedikbe beírva $\beta = 0$, illetve $\gamma = 0$ adódik. (1 pont)
Így a tanultak szerint $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan függetlenek (mert $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = \underline{0}$ csak az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ esetben lehetséges). (1 pont)
Ahhoz, hogy belássuk, hogy az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják, azt kell megmutatnunk,

hogy $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$, valamint tetszőleges $\underline{x} \in V$ vektor kifejezhető az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok lineáris kombinációjaként.
Nyilván $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$.
Legyen $\underline{x} \in V$ tetszőleges. Ekkor V leírása alapján $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_1 - x_2 + x_3)^\top$ valamely x_1, x_2, x_3 számokra. (1 pont)
Mivel $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{u} + (x_2 - x_1) \cdot \underline{v} + (x_3 - x_2) \cdot \underline{w}$, ezért $\underline{x}$ valóban kifejezhető az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok lineáris kombinációjaként. (1 pont)
Tehát az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok V egy bázisát alkotják.
(Természetesen más $\underline{w}$ vektor is lehet jó; ilyenkor az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ rendszer lineáris függetlenségének megmutatása 1 pontot, a generátorrendszerségének belátása pedig 2 pontot ér.)
Mivel egy altérben minden bázis azonos elemszámú, ezért az $\underline{u}, \underline{v}$ rendszerhez további egy vektort kell hozzávenni, hogy V egy bázisát kapjuk. (2 pont)

Az utolsó 2 pont tehát annak a közléséért és megmutatásáért jár, hogy csak pontosan 1 további vektor hozzávételével kapható bázis és más darabszám nem jöhet szóba.
Az utolsó 6 pont természetesen úgy is megszerezhető, hogy belátjuk, hogy $\dim V = 3$, például annak megmutatásával, hogy az $(1,0,0,1)^\top$, $(0,1,0,-1)^\top$, $(0,0,1,1)^\top$ vektorok egy bázist alkotnak V-ben, majd a fent leírt módon következtetünk arra, hogy egy vektorra van szükség. Ekkor a dimenzió meghatározásáért 4 pont, a bázis elemszámának egyértelműségére való hivatkozásért pedig 2 pont jár.

2. a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -4\\
2x_1 - 4x_2 + 15x_3 + 5x_4 &= -13\\
x_1 + 9x_3 - 2x_4 &= 2\\
x_1 - 5x_2 + 2x_3 + p \cdot x_4 &= q
\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 2 & -4 & 15 & 5 & -13\\ 1 & 0 & 9 & -2 & 2\\ 1 & -5 & 2 & p & q \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 5 & 5 & -5\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6\\ 0 & -3 & -3 & p & q+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 5 & -5\\ 0 & -3 & -3 & p & q+4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 3 & p-3 & q+13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & p-6 & q+16 \end{array}\right)$$ (2 pont)

Ha $p \neq 6$, akkor az utolsó sort $(p-6)$-tal osztva kapjuk a lépcsős alakot. Mivel minden oszlopban van vezéregyes (és a redukált lépcsős alakig ez már nem változhat meg), ezért ilyenkor a megoldás egyértelmű (vagyis a megoldások száma 1). (2 pont)
Ha $p = 6$ és $q \neq -16$, akkor az utolsó sor „tilos sor”. Ezért ilyenkor nincs megoldás. (1 pont)
Ha $p = 6$ és $q = -16$, akkor az utolsó sor csupa nulla sor, ezért ilyenkor a lépcsős alakot ennek az elhagyásával kapjuk. (1 pont)
Innen a Gauss-eliminációt folytatva kapjuk a redukált lépcsős alakot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & 11\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

(1 pont)

Így ha $p = 6$ és $q = -16$, akkor végtelen sok megoldás van: (1 pont)
$x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ szabad paraméter és $x_1 = 11 + 11\alpha$, $x_2 = 5 + 3\alpha$, $x_4 = -1 - \alpha$. (2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 8 & 5 \\ -9 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között két nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)
Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a második oszlopból csak a 3-at választhatjuk, így a negyedik oszlopból a 2-t kell választanunk. Vagyis az első oszlopból vagy a (-1)-et, vagy a 4-et kell választanunk. Az előbbi esetben a harmadik oszlopból az 5-öt, az utóbbi esetben pedig az 1-et kell választanunk, így csakugyan két nemnulla szorzatunk lesz, mégpedig a $(-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ és az $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$. (2 pont)
Az ezekhez tartozó permutációk rendre az $1, 2, 4, 3$, illetve a $3, 2, 4, 1$. (1 pont)
Ezek közül az első inverziószáma 1, mivel ebben a permutációban csak a 4 és a 3 áll inverzióban, (1 pont)
a másodiké 4, mivel ebben a permutációban az inverzióban álló elempárok $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 1)$ és $(4, 1)$. (1 pont)
A $(-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ szorzatot tehát negatív előjellel kell figyelembe vennünk, mivel a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páratlan, (1 pont)
a $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$ szorzatot pedig pozitív előjellel, hiszen a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páros. (1 pont)
A determináns értéke tehát $-(-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 30 + 24 = 54$. (2 pont)

4. A 2×4-es A mátrixról tudjuk, hogy $A \cdot A^\top = 0$. Határozzuk meg az $A^\top \cdot A$ mátrixot. (Itt a 0 a nullmátrixot jelöli, vagyis azt a mátrixot, aminek minden eleme nulla.)

* * * * *

Legyen
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}.$$
Ekkor az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemek $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ és $e^2 + f^2 + g^2 + h^2$. (3 pont)
Mivel $A \cdot A^\top$ a nullmátrix, ezért $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ és $e^2 + f^2 + g^2 + h^2 = 0$, (2 pont)
ami csak úgy lehetséges, ha $a = b = c = d = e = f = g = h = 0$, azaz A éppen a 2×4-es nullmátrix. (3 pont)
Így $A^\top \cdot A$ a 4×4-es nullmátrix. (1+1 pont)

Ha egy megoldó paraméteresen kiszámolja az $A \cdot A^\top$ mátrixot és azt egyenlővé teszi a nullmátrixszal, de a feladat megoldásához további érdemi lépéseket nem végez, akkor ezért legfeljebb 3 pontot kaphat.

5. Legfeljebb hányat lehet kiválasztani a jobbra látható mátrix oszlopai közül úgy, hogy a kiválasztott oszlopok lineárisan függetlenek legyenek?

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 9 & 1 & 0 & -9 \\ -2 & -6 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A keresett érték a mátrix oszloprangja, azaz a mátrix rangja. (3 pont)
A rangot a tanultak szerint Gauss-eliminációval határozzuk meg.

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 9 & 1 & 0 & -9 \\ -2 & -6 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(4 pont)

A kapott mátrix lépcsős alakú, így a rangja a sorainak (avagy a vezéregyeseinek) a száma: 3. (3 pont)
Így a mátrix oszlopai közül legfeljebb 3-at lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek.

6*. Legyen A egy $(2n) \times (2n)$-es mátrix, ahol $n \geq 2$ tetszőleges. Jelölje rendre A_1, A_2, A_3 és A_4 az A mátrix bal felső, jobb felső, bal alsó, illetve jobb alsó $n \times n$-es részmátrixát. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások (minden szóba jövő esetben).

a) Ha az A_1, A_2, A_3, A_4 mátrixok mindegyikének létezik inverze, akkor A-nak is létezik inverze.

b) Ha A_3 a nullmátrix, az A_1 és A_4 mátrixoknak pedig létezik inverze, akkor A-nak is létezik inverze.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) Az állítás nem igaz minden szóba jövő esetben. Legyen A_1, A_2, A_3 és A_4 is az $n \times n$-es egységmátrix. (0 pont)

Az A_1, A_2, A_3 és A_4 mátrixoknak létezik inverze, hiszen az egységmátrix inverze önmaga. (1 pont)
Az A mátrixnak azonban nem létezik inverze, mivel a determinánsa 0: (1 pont)
az $(n+1)$-edik sorából az elsőt levonva a determinánsa nem változik, és egy csupa 0 sort kapunk, így a tanultak szerint a determináns 0. (2 pont)

b) Az állítás igaz. Ehhez elég megmutatni, hogy az A mátrix determinánsa nem nulla, hiszen ekkor a tanult tétel szerint az A mátrixnak létezik inverze. (1 pont)
Gauss-elimináció segítségével hozzuk lépcsős alakra először az A első n sorából álló részmátrixot, azaz az $(A_1 \mid A_2)$ részmátrixot. Mivel az A_1 mátrixnak létezik inverze, azaz a determinánsa nem nulla, ezért a lépcsős alak első n oszlopában lesz vezéregyes. Most Gauss-elimináció segítségével hozzuk lépcsős alakra az A utolsó n sorából álló részmátrixot, azaz a $(0 \mid A_4)$ részmátrixot. Ekkor a lépcsős alak első n oszlopában továbbra is minden elem 0 lesz, és mivel az A_4 mátrixnak létezik inverze, azaz a determinánsa nem nulla, ezért a lépcsős alak utolsó n oszlopában lesz vezéregyes. Ekkor az A mátrixon a megfelelő elemi sorekvivalens lépéseket elvégezve egy felső háromszögmátrixot kapunk, aminek a főátlójában minden elem 1. (3 pont)
Mivel az elemi sorekvivalens lépések nem változtatják meg azt, hogy $\det A$ értéke 0 vagy sem, és a kapott felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemeknek a szorzata, ami 1 (vagyis nem 0), ezért $\det A \neq 0$, (2 pont)
vagyis a tanult tétel értelmében A-nak valóban létezik inverze.

A b) részre járó 6 pont természetesen megszerezhető annak (hiánytalan) megmutatásával is, hogy az A mátrixnak az inverze az a $(2n) \times (2n)$-es mátrix, melynek bal felső, jobb felső, bal alsó, illetve jobb alsó $n \times n$-es részmátrixa rendre A_1^{-1}, $-A_1^{-1}A_2A_4^{-1}$, 0 és A_4^{-1}, ahol 0 az $n \times n$-es nullmátrixot jelöli.