Bevezetés a számításelméletbe I.
második pótzárthelyi — pontozási útmutató
2023. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Létezik-e az alábbi egyenletrendszernek olyan megoldása, melyre $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

* * * * *

Az egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & 10 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$. (0 pont)

Gauss-eliminációt használunk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 9 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ (3 pont)

A redukált lépcsős alak alapján az egyenletrendszer megoldásai $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = \alpha - 2, x_2 = -\alpha, x_4 = 1$. (3 pont)
A kapott értékeket az $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$ egyenlőségbe helyettesítve $\alpha - 2 = 3 - 2 + 1$ adódik, (2 pont)
vagyis az egyenlőség $\alpha = 4$ mellett teljesül. (1 pont)
Mivel α bármilyen valós értéket felvehet, így $\alpha = 4$ is lehetséges, az egyenletrendszernek tehát

van a feltételnek megfelelő megoldása. (1 pont)

2. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix determinánsát a p valós paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Gauss-eliminációt fogunk használni, de ezt megelőzően kicseréljük a második és a negyedik sort, ami a determinánst a (-1)-szeresére változtatja.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & p & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & p-2 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & p-2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & p-3 & 13p-31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 16p-40 \end{vmatrix} =$$

$= 16p - 40.$ (10 pont)

A determinánst természetesen más tanult módszerrel (pl. kifejtési tétel) is meg lehet határozni. Aki helyesen írja fel a determinánst valamelyik sor vagy oszlop szerint kifejtve, de tovább nem jut, az 2 pontot kapjon. Aki a kifejtést megelőzően eléri, hogy a kifejtésre használt sorban vagy oszlopban 1, illetve 2 elem 0 legyen (természetesen a megfelelő indoklással), az 1, illetve 2 pontot kaphat ezért. Aki a kifejtés során adódó 3×3-as mátrixokat is kifejti, az további 3 pontot kaphat. A determinánsra vonatkozó, de a tárgy anyagában nem szereplő állítások (pl. Sarrus-szabály) csak a vonatkozó állítás bizonyításával együtt használhatók. A Gauss-eliminációra hasonlító, de azt valójában nem követő megoldások csak akkor lehetnek teljes értékűek, ha az egyes lépések hatásairól szó esik. Ezek hiányáért darabonként 1 pontot vonjunk le, mint ahogy számolási hibákért is. Elvi hibákért (pl. sorcsere során a (-1)-gyel szorzás elmulasztása, a kifejtési tétel során rossz előjel használata, az előjelezés elmulasztása) viszont darabonként 4 pont levonás jár.

3. Legyenek A és B 2×2-es mátrixok. C legyen az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső és jobb felső 2×2-es részmátrixa A, bal alsó és jobb alsó 2×2-es részmátrixa B. Legyen továbbá D az a 4×4-es mátrix, melynek bal felső 2×2-es részmátrixa A, jobb alsó 2×2-es részmátrixa B, a többi 8 eleme pedig 0.

a) Igaz-e, hogy ekkor $\det C = \det A \det B$ mindig teljesül?

b) Igaz-e, hogy ekkor $\det D = \det A \det B$ mindig teljesül?

* * * * *

a) Az állítás nem igaz. (0 pont)

Legyen pl. A és B is a 2×2-es egységmátrix, ekkor C-nek van két azonos sora, így a determinánsa 0, míg $A = B$ determinánsa 1, az egyenlőség tehát nem teljesül. (3 pont)

Természetesen rengeteg másik ellenpélda is adható. Hiányos megoldásra akkor jár részpontszám, ha a kérdéses determinánsokat a megoldó kiszámítja vagy ha erre nem kerül sor, akkor valamilyen meggyőző érv szól amellett, hogy az egyenlőség tényleg nem fog teljesülni. Ha az ellenpélda jó, de a determinánsok kiszámítása során a megoldó számolási hibát vét, akkor az ilyenekért darabonként 1 pontot vonjunk le. Rossz ellenpélda esetén a determinánsok kiszámításáért nem jár pont.

b) Az állítás igaz. (0 pont)

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, ekkor $D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$. (1 pont)

A determinánsa $ad - bc$, B determinánsa $eh - fg$. (1 pont)
Fejtsük ki D determinánsát az első sor szerint:

$$\det D = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A két 3×3-as determinánst az első soruk szerint kifejtve:

$$\det D = a \cdot d \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - b \cdot c \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \qquad \text{(2 pont)}$$

$$= (ad - bc) \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix},$$ amiből a kívánt állítás azonnal adódik. (1 pont)

A determináns persze másképp is számítható, de ez a b) részben tipikusan elég körülményes. Elvi hibáért (bármely részben) darabonként 4 pontot vonjunk le.

4. Létezik-e olyan mátrix, melynek a jobbra látható mátrix az inverze? Ha igen, adjuk is meg.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Legyen a feladatban szereplő mátrix A, olyan B mátrixot keresünk, melyre $B^{-1} = A$. (0 pont)
Ekkor $E = BB^{-1} = BA$ és $E = B^{-1}B = AB$ is teljesül, tehát B az A inverze kell legyen. (2 pont)
Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3/2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3/2 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \qquad \text{(4 pont)}$$

Mivel a bal oldalon megkaptuk az egységmátrixot, A-nak létezik inverze (3 pont)
és az a jobb oldalon megjelenő mátrix, így ez lesz a keresett B. (1 pont)

Az inverz létezésének megmutatásáért járó pontok természetesen máshogy is megszerezhetők, pl.: a „(pontosan) akkor létezik az inverz, ha A determinánsa nem 0” állítás 1 pontot ér, A determinánsának kiszámítása pedig további 2-t. Aki a kapott inverzről ellenőrzi, hogy azzal balról, illetve jobbról beszorozva A-t egységmátrixot kapunk, ezért 1-1 pluszpontot kapjon, feltéve, hogy ezzel nem lépi túl a 10-et (a pontok akkor járnak, ha a szorzás helyes – nem szükséges, hogy jó mátrixot szorozzon A-val a megoldó).

5. Egy 5×5-ös A mátrix első négy sora lineárisan független, az első négy oszlopa pedig lineárisan összefüggő. Határozzuk meg A rangjának összes lehetséges értékét.

* * * * *

Mivel A-nak van négy független sora, a rangja legalább 4 (a sorrang definíciója szerint). (3 pont)
A első négy oszlopa összefüggő, így A összes oszlopa is összefüggő. (2 pont)
Valóban: ha A oszlopai függetlenek lennének, akkor (az előadáson tanultak szerint) az oszlopok bármely részhalmaza, így az első négy oszlop is független lenne. (2 pont)
Mivel A oszlopai összefüggők, az oszloprang definíciója miatt A rangja kisebb, mint 5, tehát legfeljebb 4 lehet, (3 pont)
a rang tehát pontosan 4. (0 pont)

Szigorúan véve még meg kéne indokolni, hogy a rang lehet is 4 (könnyű rá példát adni), de mivel a feladat szövegéből következtethetünk arra, hogy létezik ilyen mátrix és annak rangja csak 4 lehet, ennek hiányáért ne vonjunk le pontot. Ha viszont valaki kitér erre és jó példát ad meg, akkor kaphat egy extra pontot (persze csak akkor, ha egyébként nem lenne maximum pontos a megoldása).

6*. Az 5×5-ös A mátrixról annyit tudunk, hogy a rangja 3.

a) Mutassuk meg, hogy A-nak bármely elemét bárhogy megváltoztatva a kapott mátrix rangja legfeljebb 4 lesz.

b) Mutassuk meg, hogy A-nak létezik olyan eleme, melyet alkalmasan megváltoztatva a kapott mátrix rangja 4 lesz.

* * * * *

a) Ha az új mátrix rangja 5 lenne, akkor az oszlopai független rendszert alkotnának (az oszloprang definíciója szerint). (1 pont)
Ebben az esetben azonban az eredeti mátrixnak a cserében nem érintett négy oszlopa is független lenne, (1 pont)
hiszen ezek egy független rendszer részhalmazát alkotják. (1 pont)

b) Legyen B az A olyan 3×3-as részmátrixa, melynek determinánsa nem 0. Ilyen részmátrix a determinánsrang definíciója miatt létezik. (1 pont)
Legyen i egy olyan sor, j pedig egy olyan oszlop sorszáma, melyek nem szerepelnek B-ben és legyen C az a részmátrixa A-nak, mely B sorain és oszlopain kívül az i. sort és a j. oszlopot is tartalmazza. C determinánsa a determinánsrang definíciója miatt 0 kell legyen. (1 pont)
Azt állítjuk, hogy A-ban az i. sor j. elemét tetszőlegesen megváltoztatva 4 rangú mátrixot kapunk. (1 pont)
Ennek igazolására hajtsuk végre a változtatást C-ben is és nevezzük a kapott mátrixot C'-nek. C' determinánsát az (A-ban) i. sor szerint kifejtve C determinánsától különböző értéket kapunk, (1 pont)
mert az egyetlen változás C-nek az (A-ban) i. sor szerinti kifejtéséhez képest az i. sor j. elemének és a hozzá tartozó előjeles aldeterminánsnak a szorzatában mutatkozik. Mivel a szóban forgó előjeles aldetermináns vagy $\det B \neq 0$ vagy ennek a (-1)-szerese (ami szintén nem 0) és az i. sor j. elemét megváltoztattuk, ezért $\det C' \neq \det C = 0$. (2 pont)
Mivel a változtatás utáni mátrixnak van 4×4-es nem 0 determinánsú részmátrixa, a rangja legalább 4. (1 pont)
Az a) részfeladatban beláttuk, hogy a rang ennél több nem lehet, ezért pontosan 4 kell legyen. (0 pont)

Az utolsó részpont azért 0, hogy aki a vonatkozó megállapításról elfeledkezik, az ne veszítsen pontot. Aki azonban leírja (és vagy itt, vagy az előző részfeladatban be is látja) a megállapítást, annak adjunk 1 extra pontot, ha ezzel nem lépi túl a pontszám a 10-et.