Bevezetés a számításelméletbe I.
GyakIV 2004. január 5.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$x + 2y + 2z = 13$$
$$2x + 3y + 5z = 26$$
$$3x - 5y + z = -9$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy V vektortér nem tartalmaz 30 elemű generátorrendszert, akkor tartalmaz 31 elemű lineárisan független vektorrendszert!

3. Mennyi a rangja az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi komplex elemű mátrix determinánsának valós része 0 (azaz a determináns értéke tisztán képzetes, vagy 0). (A z_1 és z_2 számok tetszőleges komplex számok, $\bar{z}_1$ és $\bar{z}_2$ pedig szokás szerint ezek konjugáltját jelöli.)

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

5. Mi a számossága annak a halmaznak, melynek elemei a racionális számok halmazának nemüres részhalmazai?

6. Hány különböző sorrendben haladhatunk át (egyetlen autós utazás, vagy séta során) Budapest hét közúti hídjának mindegyikén pontosan egyszer Budáról Pestre és pontosan egyszer Pestről Budára, ha a BME-ről (tehát Budáról) indulunk?

   (A Dunán kizárólag a hidakon mehetünk át, emiatt nem kelhetünk át kétszer egymás után ugyanabban az irányban a folyón. Megengedett viszont, hogy egy hídon átkelve rögtön ugyanazon a hídon vissza is menjünk a túloldalra, feltéve persze, hogy ugyanezen a hídon korábban még nem keltünk át abban az irányban. A hidak tényleges geográfiai sorrendjét figyelmen kívül hagyjuk, ez nem befolyásolja az átkeléseink sorrendjét.)

7. Egy fa Prüfer-kódja (az utolsó, "n" címkéjű elem leírása nélkül értelmezve a Prüfer-kódot):

   4669421

   Adjuk meg a fát!

8. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex poliéder azon lapjainak száma, melyek páratlan oldalú sokszögek, páros szám!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 17$$

2. Legyen U_1 és U_2 az 5-dimenziós valós tér két háromdimenziós altere. Bizonyítsuk be, hogy $U_1 \cap U_2$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrixra igaz, hogy kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy az így keletkező új mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié.

   Lássuk be azt is, hogy csak egy sorral vagy csak egy oszloppal való bővítés általában nem elegendő a fentiekhez, vagyis csak egy sorral vagy csak egy oszloppal bővítve egy mátrixot nem mindig növelhető annak rangja.

4. Legyen $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, λ az $\mathbf{A}$ egyik sajátértéke és $\mathbf{v}$ egy ehhez tartozó sajátvektor. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}$ az $\mathbf{A}^3$ mátrixnak is sajátvektora, és állapítsuk meg, hogy $\mathbf{A}^3$ milyen sajátértékéhez tartozik $\mathbf{v}$ mint sajátvektor.

5. Tekintsük azon végtelen $0-1$ sorozatok A halmazát, melyekre igaz, hogy tetszőleges kezdőszeletükben legfeljebb eggyel tér el az odaeső 0-k és 1-esek száma. (Ez azt jelenti, hogy tetszőleges n pozitív egész számra a sorozat első n eleme között előforduló 0-k és 1-esek száma legfeljebb eggyel tér el egymástól.) Mi az A halmaz számossága?

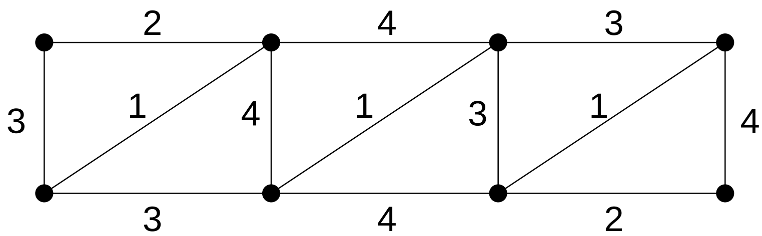
6. Hány különböző módon tűzhetjük ki valamely tantárgy négy vizsgaidőpontját a vizsgaidőszak megadott négy hetén úgy, hogy az alábbiak mind teljesüljenek:

   1. A négy hét mindegyikére a tárgy egy-egy vizsgájának kell esnie;

   2. A vizsgák nem lehetnek szombaton vagy vasárnap, a hét többi öt napja közül pedig pontosan háromnak kell előfordulnia a tárgy vizsganapjai között.

   (Két beosztást akkor tekintünk azonosnak, ha a vizsganapok ugyanazt a négy dátumot jelölik ki a két beosztás szerint.)

7. Adjuk meg az alábbi élsúlyokkal megadott gráf összes minimális súlyú feszítőfáját!



8. Tekintsük egy szabályos oktaéder élhálózatának gráfját. Bizonyítsuk be, hogy ehhez tetszőleges (még be nem húzott) élet hozzávéve olyan gráfot kapunk, ami nem síkbarajzolható.

   (Emlékeztető: Szabályos oktaédernek hívják azt a testet, amit például úgy kaphatunk, hogy egy kocka lapjainak középpontjait tekintjük csúcsainak, élei pedig a kockában szomszédos lapok középpontjában elhelyezkedő csúcsokat kötik össze.)