Bevezetés a Számításelméletbe I.

Kilencedik gyakorlat, 2017. november 7-10.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixműveletek elvégezhetők-e és ha igen, adjuk meg az eredményt.

a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$

d) $A \cdot B + 2B$ e) $B \cdot B^T$

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét *a kifejtési tétel segítségével.*

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & \pi \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Írjuk fel az $A(1;2;12)$, $B(3;1;3)$ és $C(2;1;5)$ pontokon átmenő sík egyenletét vektoriális szorzás segítségével.

---

4. A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy minden $1 \le i, j \le 4$ esetén

$$a_{i,j} = \begin{cases} i + j, & \text{ha } j = 1, 2, \\ 9 - i - j, & \text{ha } j = 3, 4; \end{cases} \quad \text{és} \quad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1, 3, \\ 1 - j, & \text{ha } i = 2, 4, \end{cases}$$ (ZH, 2011. december 5.)

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot. b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát.

5. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

6. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra. Az igaz egyenlőségeket lássuk be, a hamisakra mutassunk ellenpéldát. (E jelöli az $n \times n$-es egységmátrixot.)

a) $AB + B = (A + E)B$ b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ c) $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$

7. Vektoriális szorzás segítségével határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2;-3;4)$ ponton és tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-7}$, $z = -5$ egyenletrendszerű egyenest. (ZH, 2012. december 11.)

---

8. Oldjuk meg az $A \cdot X = B$ „mátrixegyenletet” az alábbi A és B mátrixokra (vagyis határozzuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre $A \cdot X = B$ teljesül).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 16 & 0 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét a p paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 2 & p \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 1 & 0 & 2 & p \\ 1 & 1 & p & 4 \end{vmatrix}$$

10. a) Számítsuk ki az alábbi A és B mátrixok 2008-adik hatványát (vagyis annak a 2008 tagú szorzatnak az értékét, amelyben minden tényező A, illetve B). (ZH, 2008. október 21., 2008. december 2.)

b) A kapott eredményekből mire lehet következtetni a két mátrix determinánsára vonatkozóan?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

11. Vektoriális szorzás segítségével állapítsuk meg, hogy a p paraméter melyen értékeire esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok. (ZH, 2014. október 20.)

12. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1 és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemek összegét. (ZH, 2012. december 11.)

13. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra. (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \ge 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \ge 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$. (ZH, 2012. október 18.)

14. Mutassuk meg, hogy bármely $n \times n$-es, nemnulla determinánsú mátrix minden sora tartalmaz olyan elemet, amelynek (de csak annak) az alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a mátrix determinánsa nullává változzon.

15. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.) (ZH, 2014. október 20.)

16. Egy $2k \times 2k$-as mátrix főátlójának minden eleme γ, a bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő átló minden eleme δ, a többi elem pedig 0. Számítsuk ki a mátrix determinánsát.