

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (2; 3)$ vektorhoz a $(2; 5)$ -öt, a $\underline{b}_2 = (0; 2)$ -höz a $(2; 1)$ -et rendeli.
- Adjuk meg f -nek az $[f]_B$ mátrixát a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerint.
 - Határozzuk meg α és β értékét, ha f az $\alpha\underline{b}_1 + \underline{b}_2$ vektorhoz az $3\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2$ vektort rendeli.
 - Adjuk meg f -nek az $[f]$ mátrixát.
 - Mit rendel f a $(4; 6)$ vektorhoz?

2. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1; 2), (1; 0)\}$ bázisban.

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (0; 1)$ vektorhoz és a $\underline{b}_2 = (4; 1)$ vektorhoz is a $(8; 1)$ vektort rendeli.

- Határozzuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.
- Mely \mathbb{R}^2 -beli \underline{v} vektorokra igaz, hogy $f(\underline{v}) = \underline{v}$?

4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis \mathbb{R}^3 -ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a \underline{b}_2 vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2014. december 15.)

5. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformáció és B bázis \mathbb{R}^n -ben. Igazak-e mindig az alábbi állítások? (\approx ZH, 2012. december 11.)

- Ha $\text{Ker } f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor $\det[f]_B = 0$.
- Ha $\det[f]_B = 0$, akkor $\text{Ker } f$ tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

6. Az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az \mathbb{R}^3 -beli $B = \{\underline{b}_1 = (1; 0; 0), \underline{b}_2 = (2; 1; 0), \underline{b}_3 = (2; 2; 1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat. (ZH, 2014. november 27.)

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ egy bázis \mathbb{R}^2 -ben és legyen $[f]_B$ a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. (\approx ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

8. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis \mathbb{R}^3 -ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. A p paraméter milyen értékeire teljesül az $5\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \text{Ker } f$ állítás?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis \mathbb{R}^3 -ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 = (1; 2; 3)$, $\underline{b}_2 = (2; 3; 4)$ és f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a \underline{b}_3 vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) = (3; 6; 5)$. (\approx ZH, 2010. december 6.)

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis \mathbb{R}^n -ben. Mutassuk meg, hogy ha az $[f]_B$ mátrix minden sorában az elemek összege 1, akkor $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \dots + \underline{b}_n \in \text{Im } f$. (\approx ZH, 2008. november 25.)

11. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 0)$ és $\underline{b}_2 = (1, 1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y, 3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. (\approx ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

12. Előfordulhat-e, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixát két különböző bázisban felírva az alábbi eredményeket kapjuk?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Nevezünk egy \mathbb{R}^n -beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$, illetve $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n\}$ két bázis \mathbb{R}^n -ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \dots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \dots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[f]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[f]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. (\approx ZH, 2012. december 3.)