Bevezetés a Számításelméletbe I.

Nyolcadik gyakorlat, 2024. november 4.

1. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (ZH, 2022. december 12.)

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét. (ZH, 2019. december 16.)

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

---

3. Számítsuk ki az alábbi determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{vmatrix}$$

4. Számítsuk ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsokat.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

5. A 4×4-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij} (minden $1 \le i, j \le 4$ esetén). Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ c) $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$

Oldjuk meg a feladatot 4×4-es helyett 99×99-es mátrixokra is.

6. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme 1 vagy -1. Bizonyítsuk be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.

---

7. Számítsuk ki az alábbi determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(ZH, 2014. október 20.)

8. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a *determináns definíciója szerint.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

9. A 4×4-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij} (minden $1 \le i, j \le 4$ esetén). Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = i \cdot j$ b) $a_{i,j} = \min\{i, j\}$ c) $a_{ij} = 2^i + 5j + 3$

Oldjuk meg a feladatot 4×4-es helyett 100×100-as mátrixokra is.

10. Hogyan változik meg egy 10×10-es mátrix determinánsa a következő műveletek hatására?

a) A mátrix minden elemét megszorozzuk 2-vel.

b) A 3. és a 7. sorhoz (tagonként) hozzáadjuk ennek a két sornak a (tagonként vett) különbségét. (A két sor különbsége alatt azt értjük, hogy a 3. sor elemeiből vonjuk ki a 7. sor megfelelő elemeit).

c) Minden $1 \le i, j \le 10$ esetén az i-edik sor j-edik elemét $\frac{i}{j}$-vel szorozzuk.

11. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok. (ZH, 2011. október 20.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

12. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke? (ZH, 2014. december 19.)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

13. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004} \text{ -nek a } (2i + j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát. (ZH, 2004. november 4.)

14. Az $n\times n$-es A mátrixra teljesül, hogy a főátlóban álló minden eleme 0 és bármely $1 \le i < j \le n$ esetén $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ (ahol $a_{i,j}$ a mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelöli). Mutassuk meg, hogy ha n páratlan, akkor $\det A = 0$. (ZH, 2012. december 11.)

15. Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának. (ZH, 2008. október 21.)

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$