

1. Lineáris leképezések-e az alábbi  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés  $[f]$  mátrixát és határozzuk meg a  $\text{Ker } f$  magteret és az  $\text{Im } f$  képteret, valamint ezek dimenzióját.

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z);$

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz annak az  $x$  tengelyre vett tükörképét rendeli;

c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz azt az  $x$  tengelyre eső vektort rendeli, amelynek első koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátái közül a nagyobb.

2. Lineáris leképezések-e az alábbi  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés  $[f]$  mátrixát és határozzuk meg a  $\text{Ker } f$  magteret és az  $\text{Im } f$  képteret, valamint ezek dimenzióját.

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , minden  $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$  esetén  $f(\underline{v})$  utolsó koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátáinak összege,  $f(\underline{v})$  többi koordinátája pedig megegyezik  $\underline{v}$  megfelelő koordinátájával;

b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f : (x, y, z) \mapsto (|x|, |y|, |z|);$

c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz az  $x$  tengelyre vett tükörképének origó körüli  $+60^\circ$ -os elforgatottját rendeli.

3. Az  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés a  $(2, 6)$  vektorhoz a  $(14, 16, 14)$  vektort, az  $(1, -3)$  vektorhoz pedig az  $(1, -10, -5)$  vektort rendeli.

a) Írjuk fel  $f$  mátrixát.

b) Mit rendel  $f$  a  $(4, -1)$  vektorhoz?

c) A  $p$  paraméter milyen értékére teljesül a  $(10, -9, p) \in \text{Im } f$  állítás?

4. Az  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:

- Tetszőleges 7  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor képe lineárisan összefüggő;

- Tetszőleges 8 lineárisan független  $\mathbb{R}^n$ -beli vektor között van olyan, amelyiknek a képe nem  $\underline{0}$ .

Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $n \leq 13$ . ( $\approx$ ZH, 2003. december 2.)

5. Az  $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés mátrixa látható jobbra. Határozzuk meg  $\dim \text{Im } f$  és  $\dim \text{Ker } f$  értékét és adjunk meg egy-egy bázist az  $\text{Im } f$  és  $\text{Ker } f$  alterekben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

6. Lineáris leképezések-e az alábbi  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvények? Ha a válasz igen, írjuk fel a leképezés  $[f]$  mátrixát és határozzuk meg a  $\text{Ker } f$  magteret és az  $\text{Im } f$  képteret, valamint ezek dimenzióját.

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz azt az  $x$  tengelyre eső vektort rendeli, amelynek első koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátáinak összege;

b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f : (x, y, z) \mapsto (3x - 5y + 7z, -4x + 2y - 6z, x + 3y - z).$

c)  $f : \mathbb{R}^{100} \rightarrow \mathbb{R}^{100}$ , minden  $\underline{v} \in \mathbb{R}^{100}$  és minden  $1 \leq i \leq 100$  esetén  $f(\underline{v})$   $i$ -edik koordinátája a  $\underline{v}$  első  $i$  koordinátájának összege;

7. Az  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció az  $(1, 2)$  és a  $(3, 4)$  vektorhoz is az  $(5, 6)$  vektort rendeli.

a) Írjuk fel  $f$  mátrixát.

b) Mit rendel  $f$  a  $(99, 100)$  vektorhoz?

c) Igaz-e az  $(55, 55) \in \text{Im } f$  állítás?

d) Igaz-e az  $(55, 55) \in \text{Ker } f$  állítás?

8. Legyen  $f : \mathbb{R}^{20} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$  lineáris leképezés,  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}\}$  bázis  $\mathbb{R}^{20}$ -ban és  $\underline{v} \in \mathbb{R}^{10}, \underline{v} \neq \underline{0}$  rögzített vektor. Adjuk meg  $\dim \text{Ker } f$  értékét, ha tudjuk, hogy  $f$  a  $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{20}$  vektorok mindegyikéhez  $\underline{v}$ -t rendeli. (ZH, 2014. november 27.)

9. Legyen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineáris transzformáció és legyen  $A = [f]$  az  $f$  mátrixa. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

a) Ha  $\text{Ker } f$  tartalmaz a nullvektortól különböző vektort, akkor  $\det A = 0$ .

b) Ha  $\det A = 0$ , akkor  $\text{Ker } f$  tartalmaz a nullvektortól különböző vektort.

c) Ha  $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } f$ , akkor  $A^2 = 0$ .

d) Ha  $A^2 = 0$ , akkor  $\text{Im } f \subseteq \text{Ker } f$ .

10. Legyen  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés és  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ . Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) Ha  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  generátorrendszer  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor  $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_k)$  generátorrendszer  $\mathbb{R}^m$ -ben.

b) Ha  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  generátorrendszer  $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor  $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_k)$  generátorrendszer  $\text{Im } f$ -ben.

c) Ha  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  lineárisan független rendszer, akkor  $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_k)$  is lineárisan független rendszer.

d) Ha  $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_k)$  lineárisan független rendszer, akkor  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  is lineárisan független rendszer.

11. Mutassuk meg, hogy ha az  $n \times n$ -es  $A$  és  $B$  mátrixokra  $A \cdot B = 0$  teljesül, akkor  $r(A) + r(B) \leq n$ .