Bevezetés a Számításelméletbe I.

Hetedik gyakorlat, 2024. október 29.

1. Oldjuk meg a Gauss-eliminációt segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket (a második egyenletrendszer esetében a p valós paraméter minden értékére).

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= p \end{aligned}$$

---

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében. (ZH, 2005. november 22.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2014. október 20.)

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + 4x_4 = -2 \\ &2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 = -3 \\ &x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 2 \\ &3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 = -6 \end{aligned}$$

4. Bázist alkotnak-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek? Ha igen, adjuk meg az alábbi $\underline{v}$ vektor koordinátavektorát az adott bázisban.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

---

5. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját. (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

a) $$\begin{aligned} S_1:\ x + y + z &= 6 \\ S_2:\ 2x + 3y - 2z &= 0 \\ S_3:\ 5x + 7y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} S_1:\ 2x - y + 5z &= 3 \\ S_2:\ 3x + 2y + 6z &= 4 \\ S_3:\ 4x - 9y + 13z &= 9 \end{aligned}$$

6. Létezik-e az alábbi egyenletrendszernek olyan megoldása, melyre $x_1 = 3(x_4)^3 - 2x_4 + 1$? (ZH, 2023. december 11.)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned}$$

7. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2004. december 14., 2014. december 19.)

a) $$\begin{aligned} -x + 3y - z - 3w &= -2 \\ 2x - 6y + 5z + 12w &= 7 \\ 3x - 9y + 5z + p \cdot w &= 9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 14 \\ 3x_1 + 13x_2 - 9x_3 + p \cdot x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + (p - 13) \cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

8. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok? Ha igen, adjuk meg ebben a bázisban az alábbi $\underline{a}$ vektor koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix}$$

9. A p valós paraméter milyen értékeire alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ vektorrendszer? A p-nek ezekre az értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -19 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ -5 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -5 \\ -48 \\ -19 + 3p \end{pmatrix}$$

10. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n &= n - 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n &= n - 2 \\ \vdots \qquad\qquad & \ \vdots \quad \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ \vdots \quad & \ \vdots \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

11. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása;

b) végtelen sok megoldása van?