Bevezetés a Számításelméletbe I.

Hetedik gyakorlat, 2018. október 16-17.

1. Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket (a b) feladat esetében a p valós paraméter minden értékére).

a) $$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2\\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1\\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34\\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2\\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1\\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34\\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= p \end{aligned}$$

---

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében. (ZH, 2005. november 22.)

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 14\\ 2x_1+6x_2+10x_3+6x_4+2x_5 &= 28\\ x_1+5x_2+9x_3+2x_4+3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2014. október 20.)

$$\begin{aligned} &x_1-x_2+4x_4=-2\\ &2x_1-2x_2+x_3+8x_4=-3\\ &x_1+x_2+6x_3+8x_4=2\\ &3x_1-3x_2+p\cdot x_3+(p^2+p+12)\cdot x_4=-6 \end{aligned}$$

4. Bázist alkotnak-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek? Ha igen, adjuk meg az alábbi $\underline{v}$ vektor koordinátavektorát az adott bázisban.

a) $$\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\23\\0\\17\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-9\\11\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\12\\-2\\7\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$$

$$\underline{v}=\begin{pmatrix}3\\5\\8\\9\end{pmatrix}$$

5. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

a) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= n\\ x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_n &= n-1\\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+3x_n &= n-2\\ \vdots\quad & \vdots \quad \vdots\\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 1\\ x_2+x_3 &= 1\\ \vdots\quad & \vdots\quad \vdots\\ x_{n-1}+x_n &= 1\\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

---

6. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját. (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

a) $$\begin{aligned} S_1:&\ \ x+y+z = 6\\ S_2:&\ \ 2x+3y-2z = 0\\ S_3:&\ \ 5x+7y-3z = 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} S_1:&\ \ 2x-y+5z = 3\\ S_2:&\ \ 3x+2y+6z = 4\\ S_3:&\ \ 4x-9y+13z = 9 \end{aligned}$$

7. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2004. december 14., 2014. december 19.)

a) $$\begin{aligned} -x+3y-z-3w &= -2\\ 2x-6y+5z+12w &= 7\\ 3x-9y+5z+p\cdot w &= 9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+5x_2-x_3+4x_4 &= 2\\ x_1+8x_2+8x_3-2x_4 &= 14\\ 3x_1+13x_2-9x_3+p\cdot x_4 &= -2\\ 2x_1+14x_2+10x_3+(p-13)\cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

8. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok? Ha igen, adjuk meg ebben a bázisban az alábbi $\underline{a}$ vektor koordinátavektorát.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}10\\23\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}4\\12\\-2\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\34\end{pmatrix}$$

9. A p valós paraméter milyen értékeire alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben a $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4\}$ vektorrendszer? A p-nek ezekre az értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.

$$\underline{b}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\11\\13\end{pmatrix},\ \underline{b}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\15\\12\end{pmatrix},\ \underline{b}_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-19\\4\\19\end{pmatrix},\ \underline{b}_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\-5\\p\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-5\\-48\\-19+3p\end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása;

b) végtelen sok megoldása van?