

1. Oldjuk meg a Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket (a b)feladat esetében a p valós paraméter minden értékére).

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ \text{a) } 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ \text{b) } 5x_1 + 23x_2 - 9x_3 + 12x_4 &= -1 \\ -x_1 + 11x_3 - 2x_4 &= 34 \\ 3x_1 + 17x_2 + x_3 + 7x_4 &= p \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében. (ZH, 2005. november 22.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2014. október 20.)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + p \cdot x_3 + (p^2 + p + 12) \cdot x_4 &= -6 \end{aligned}$$

4. Bázist alkotnak-e az alábbi, \mathbb{R}^4 -beli vektorrendszerek? Ha igen, adjuk meg az alábbi \underline{v} vektor koordinátavektorát az adott bázisban.

$$\text{a) } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \quad \text{b) } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

5. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszereket.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n &= n - 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n &= n - 2 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n &= 1 \end{aligned} \quad \text{b) } \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

6. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1 , S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját. (ZH, 2001. október 31., 2004. december 20.)

$$\begin{aligned} \text{a) } S_1: x + y + z &= 6 \\ S_2: 2x + 3y - 2z &= 0 \\ S_3: 5x + 7y - 3z &= 6 \end{aligned} \quad \text{b) } \begin{aligned} S_1: 2x - y + 5z &= 3 \\ S_2: 3x + 2y + 6z &= 4 \\ S_3: 4x - 9y + 13z &= 9 \end{aligned}$$

7. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2004. december 14., 2014. december 19.)

$$\begin{aligned} \text{a) } -x + 3y - z - 3w &= -2 \\ 2x - 6y + 5z + 12w &= 7 \\ 3x - 9y + 5z + p \cdot w &= 9 \end{aligned} \quad \text{b) } \begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 14 \\ 3x_1 + 13x_2 - 9x_3 + p \cdot x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + (p - 13) \cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

8. Bázist alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ben az alábbi $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok? Ha igen adjuk meg ebben a bázisban az alábbi \underline{a} vektor koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix}$$

9. A p valós paraméter milyen értékeire alkot bázist \mathbb{R}^4 -ben a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ vektorrendszer? A p -nek ezekre az értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -19 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \underline{b}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ -5 \\ p \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -5 \\ -48 \\ -19 + 3p \end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer, amelyről tudjuk, hogy megoldható és a megoldás egyértelmű. Ha megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása;

b) végtelen sok megoldása van?