

1. Jelölje  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ,  $\underline{a}$ ,  $\underline{c}$  és  $\underline{d}$  az ÖTÖDIK GYAKORLAT 1. feladatában bevezetett  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokat.

a) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ,  $\underline{a}$  vektorrendszer?

b) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ,  $\underline{c}$  vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg  $\underline{a}$  koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

c) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$ ,  $\underline{d}$  vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg  $\underline{d}$  koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Határozzuk meg az alábbi alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami a csupa 1 koordinátájú vektort tartalmazza.

$$a) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\} \quad b) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

3. Legyen  $\mathbb{R}^3$ -ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2024 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el az alábbi vektorrendszerekről, hogy bázist alkotnak-e  $\mathbb{R}^3$ -ben és ha igen, határozzuk meg a hiányzó, negyedik vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

a)  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$

b)  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{d}$

4. Az alábbi  $V$  alterekben adjunk meg egy olyan bázist, amely a megadott  $\underline{v}$  vektort tartalmazza, valamint határozzuk meg  $V$  dimenzióját.

a)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokból áll, amelyekben a felső két koordináta összege megegyezik az alsó kettő összegével;  $\underline{v}$ -nek mind a négy koordinátája 1.

b)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^{100}$ -beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak;  $\underline{v}$  ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7.

5. Legyenek  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  lineárisan független vektorok  $\mathbb{R}^n$ -ben. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az  $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$ ,  $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$ ,  $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$ ,  $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$  vektorok szintén lineárisan függetlenek? ( $\approx$ ZH, 2004. december 14.)

6. Jelölje  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  és  $\underline{a}$  a jobbra látható vektorokat.

Adjunk meg  $\mathbb{R}^4$ -ben egy, az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az  $\underline{a}$  koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Jelölje  $\underline{b}_1$ ,  $\underline{b}_2$  és  $\underline{v}$  a jobbra látható vektorokat. A  $p$  paraméter milyen értékeire igaz a  $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$  állítás? A  $p$ -nek erre az értékeire határozzuk meg a  $[\underline{v}]_B$  koordinátavektort, ahol  $B$  a  $\underline{b}_1$ ,  $\underline{b}_2$  vektorrendszert jelöli.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}$$

8. Tegyük fel, hogy  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  bázis a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altérben. A  $p$  paraméter mely értékeire teljesül, hogy a  $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$  vektorok szintén bázist alkotnak  $V$ -ben?

9. Határozzuk meg a NEGYEDIK GYAKORLAT 8. feladatának a) részében definiált  $\mathbb{R}^4$ -beli altérnek (vagyis a felülről lefelé négy hosszú számtani sorozatot alkotó vektorokból álló altérnek) a dimenzióját.

10. Tudjuk, hogy az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{d}$  vektorok bázist alkotnak  $\mathbb{R}^4$ -ben. Határozzuk meg az  $\underline{a} + \underline{b}$ ,  $\underline{c} + \underline{d}$ ,  $\underline{a} + \underline{c}$ ,  $\underline{b} + \underline{d}$  vektorok által generált altér dimenzióját. (ZH, 2017. november 30.)

11. A  $V \leq \mathbb{R}^n$  altérre  $\dim V = k$  és a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorok generátorrendszert alkotnak  $V$ -ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  bázis  $V$ -ben?

12. Megadható-e

a)  $\mathbb{R}^4$ -ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független? (ZH, 2014. október 20.)

b)  $\mathbb{R}^5$ -ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az? (ZH, 2014. december 15.)

c)  $\mathbb{R}^4$ -ben hat darab vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson  $\mathbb{R}^4$ -ben, de semelyik 4 sem alkosson generátorrendszert  $\mathbb{R}^4$ -ben? (ZH, 2014. december 19.)

13. Az  $\mathbb{R}^{99}$ -beli  $V$  és  $W$  alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy  $V$ -nek és  $W$ -nek van a nullvektortól különböző közös eleme.