Bevezetés a Számításelméletbe I.

Ötödik gyakorlat, 2024. október 14.

1. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{d}=\begin{pmatrix}2\\20\\202\\2024\end{pmatrix}.$$

a) Igaz-e, hogy $\underline{a}\in\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$?

b) Igaz-e, hogy $\underline{b}\in\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$?

c) Határozzuk meg az $\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$ generált alteret úgy, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amivel egy tetszőleges $\mathbb{R}^4$-beli vektorról nagyon egyszerűen megmondható, hogy benne van-e.

d) Határozzuk meg hasonló módon az $\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{a}\rangle$ generált alteret is.

e) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ vektorok?

f) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u},\underline{v},\underline{w},\underline{a}$ vektorok?

---

2. Az **1.** feladatban bevezetett vektorokra határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret („gyorsteszt” készítésével), majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{c}$

b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

3. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{d}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e; végül válaszoljuk meg azt a kérdést, hogy a felsorolt vektorok generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben.

a) $\underline{a},\underline{b}$

b) $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$

c) $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$

4. Tudjuk, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a},\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\underline{c}$ rendszer is lineárisan független? (ZH, 2020. december 14.)

5. A $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy $\underline{v}_1$ benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2,\underline{v}_3,\ldots,\underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1=\underline{0}$.

---

6. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszerek generált alterét. Ha ez az altér sík vagy egyenes, akkor adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a) $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\15\\-3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$

7. a) A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek a jobbra látható, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok? (2020. október 30.)

b) A $p=-4$ értékre határozzuk meg az $\langle\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}\rangle$ generált alteret (vagyis készítsünk hozzá „gyorstesztet”).

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\p\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\p\\8\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\p\end{pmatrix}$$

8. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok? (ZH, 2022. december 19.)

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\7\\11\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\7\\13\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\7\\17\end{pmatrix}$$

9. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli vektorok (valamely n-re) és legyen $\underline{u}=\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{v}=\underline{b}-\underline{c}$ és $\underline{w}=\underline{c}+2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is lineárisan független.

10. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ a jobbra látható, $\mathbb{R}^3$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ generált altér összes olyan elemét, aminek a második koordinátája 2-vel, a harmadik 3-mal nagyobb az elsőnél. (ZH, 2021. október 28.)

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}3\\10\\1\end{pmatrix},\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix}$$

11. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-3\underline{d}$, $\underline{a}+\underline{c}+5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$? (ZH, 2022. október 18.)