

1. Döntsük el, hogy  $\mathbb{R}^4$ -ben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokból áll, amelyeknek minden koordinátája 0 és 1 között van (megengedve a 0-t és az 1-et is).

b)  $W$  azokból az  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokból áll, amelyekben az első koordináta egyenlő a negyedikkel.

2. Legyen  $\mathbb{R}^4$ -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 202 \\ 2020 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$

b)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$

c)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}, \underline{d}$

3. Döntsük el, hogy  $\mathbb{R}^6$ -ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^6$ -beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b)  $W$  azokból az  $\mathbb{R}^6$ -beli vektorokból áll, amelyekben a felső három koordináta összege megegyezik az alsó három összegével.

4. Legyen  $\mathbb{R}^3$ -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

b)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{a}$

c)  $\underline{u}, \underline{a}$

d)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

e)  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{b}$

5. Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$  vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a  $3\underline{a} - \underline{b}$ ,  $2\underline{a} + \underline{c}$  és  $4\underline{b} - 3\underline{c}$  vektorok is mindig lineárisan függetlenek? (ZH, 2018. december 17.)

6. A  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  vektorokról tudjuk, hogy  $\underline{v}_1$  benne van a többi  $n - 1$  vektor generált alterében, de a  $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$  vektorok közül semelyik sincs benne a többi  $n - 1$  vektor generált alterében. Bizonyítsuk be, hogy  $\underline{v}_1 = \underline{0}$ .

7. Nevezzünk egy  $\mathbb{R}^5$ -beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak  $\mathbb{R}^5$ -ben? (ZH, 2012. október 18.)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi,  $\mathbb{R}^3$ -beli vektorrendszerek generált alterét. Ha ez az alter sík vagy egyenes, akkor adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. a) A  $p$  valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek a jobbra látható,  $\mathbb{R}^4$ -beli  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  vektorok? (ZH, 2019. december 16.)

b) A  $p = -1$  értékre határozzuk meg az  $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$  generált alteret (vagyis készítsünk hozzá „gyorstesztet”).

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

10. Legyenek  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  tetszőleges  $\mathbb{R}^n$ -beli vektorok (valamely  $n$ -re) és legyen  $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}$ ,  $\underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$  és  $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$ . Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineárisan független, akkor  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  is lineárisan független.

b) Ha  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  lineárisan független, akkor  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  is lineárisan független.

11. Határozzuk meg az  $x - 4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$  egyenletrendszerű  $e$  egyenes minden olyan  $P$  pontját, amelyre a  $P$ -t a  $Q(7; 12; 4)$  ponttal összekötő  $f$  egyenes merőleges  $e$ -re. (ZH, 2015. október 22.)

12. A  $p$  paraméter milyen értékére esnek egy síkba az  $A(2; 3; 3)$ ,  $B(3; 4; 1)$ ,  $C(4; 6; 2)$  és  $D(p; 2; 5)$  pontok? (ZH, 2014. október 20.)

13. Párhuzamos-e az  $\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$  egyenletrendszerű egyenes a  $6x + y + 7z = 91$ , illetve az  $5x + 2y = 79$  egyenletű síkok metszésvonalával? (ZH, 2014. december 19.)