

1. a) Írjuk fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét.

b) Írjuk fel a $Q(2, -5, -2)$ ponton átmenő és a $z = 4x + 7$ egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét.

2. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Benne van-e az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérben az \underline{a} vektor?

b) Benne van-e az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérben a \underline{b} vektor?

c) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret oly módon, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amellyel egy tetszőleges \mathbb{R}^4 -beli vektorról egyszerűen megmondható, hogy a generált altérhez tartozik-e.

3. a) Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és tartalmazza a $P(1; 5; 5)$ pontot? (ZH, 2010. október 21.)

b) Átmegy-e az origón az az egyenes, amely párhuzamos az $\frac{x-5}{2} = \frac{1-y}{2} = -z - 9$ egyenletrendszerű egyenessel és átmegy a $P(4; -4; 3)$ ponton?

4. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben (\mathbb{R}^3 -ben)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Benne van-e az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altérben az \underline{a} vektor?

b) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret. (Készítsünk „gyorstesztet”!)

c) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ generált alteret. (Készítsünk „gyorstesztet”!)

d) Milyen geometriai alakzatot határoznak meg a c) feladat megoldásai?

5. A $2x + y - 3z = 2$ egyenletű S_1 és az $x + 7y + 3z = 21$ egyenletű S_2 síkok esetében döntsük el, hogy

a) rajta van-e a $P(5; 1; 3)$ pont az S_1 és az S_2 metszésvonalán;

b) merőleges-e egymásra S_1 és S_2 ? (ZH, 2011. december 13.)

6. Az e egyenes egyenletrendszere $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$, az f egyenes egyenletrendszere pedig $\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}$. Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza. (ZH, 2016. december 5.)

7. Döntsük el, hogy a $P(1, 4, 4)$ és a $Q(3, 12, -2)$ pontokon átmenő egyenes metszi-e a koordinátatengelyek valamelyikét. Ha igen, adjuk meg a metszésponto(ka)t. (ZH, 2006. november 9.)

8. Írjuk fel a háromdimenziós tér $P = (1, 1, 1)$ és $Q = (3, 1, 5)$ pontjait összekötő szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét. Hol metszi ez a sík az y tengelyt? (ZH, 2013. október 24.)

9. Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret az alábbi $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokra. (Készítsünk „gyorstesztet”!)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12; 1; 7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x - 3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest. (ZH, 2010. december 6.)

11. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1; 3; 4)$ és a $Q(3; 6; 10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y + 4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel. (ZH, 2012. október 18.)