Bevezetés a Számításelméletbe I.
Harmadik gyakorlat, 2022. szeptember 20.

1. Mi 303^{404} utolsó két számjegye?

2. Milyen maradékot ad 701^{701701} 99-cel osztva? (ZH, 2021. december 20.)

---

3. Milyen maradékot ad

a) 4^{444} 363-mal osztva; (ZH, 2018. október 18.)

b) $2021^{2021} - 2021^{101}$ 600-zal osztva? (ZH, 2021. október 28.)

c) 39^{1200} 26-tal osztva?

4. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva? (ZH, 2005. május 5.)

5. Hány olyan 504-nél nem nagyobb, pozitív egész szám van, amelynek van 504-gyel osztva 1 maradékot adó többszöröse? (ZH, 2019. december 16.)

6. Legyen $n = 200704261601$. Határozzuk meg n^n utolsó három számjegyét. (ZH, 2007. április 26.)

---

7. Milyen maradékot ad

a) 7^{3234} 80-nal osztva; (ZH, 2020. január 3.)

b) 2020^{2021} 1011-gyel osztva; (ZH, 2020. december 14.)

c) $3^{147} + 70^{147}$ 73-mal osztva? (ZH, 2021. december 13.)

8. Az n szám kettes számrendszerbeli alakja 1101001011011100011011. Határozzuk meg n^n kettes számrendszerbeli alakjának utolsó négy jegyét. (ZH, 2014. április 24.)

9. Adjuk meg az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy 51-gyel osztva 3 maradékot ad, továbbá a szám 17-szeresének utolsó két számjegye 15. (ZH, 2017. december 11.)

10. Egy mértani sorozat első tagja 41, kvóciense 7. (A sorozat tagjai tehát: 41, 287, 2009, ...). Képzeletben szorozzuk össze a sorozat első 800 tagját. Mi a kapott szám utolsó 3 számjegye? (ZH, 2009. április 24.)

11. Milyen maradékot ad $46^{47^{48}}$ 25-tel osztva? (ZH, 2014. április 24.)

12. Bizonyítsuk be, hogy ha a egy 11-gyel nem osztható egész szám, akkor az $x^3 \equiv a \pmod{121}$ kongruencia megoldható (vagyis létezik olyan x egész, amelyre a kongruencia fennáll). (ZH, 2009. április 24.)

13*. Határozzuk meg az összes olyan 1 és 100 közti a egész számot, melyre $a^{21} \equiv 1 \pmod{100}$. (ZH, 2020. december 14.)

14*. Igaz-e, hogy ha az a és b egész számokra $a^{40} \not\equiv b^{40} \pmod{100}$, akkor $a^{40}b^{40} \not\equiv 1 \pmod{100}$? (ZH, 2021. december 13.)