

1. Jelölje  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}, \underline{b}$  és  $\underline{c}$  a MÁSODIK GYAKORLAT 2. feladatában bevezetett  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokat.
- a) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$  vektorrendszer?
- b) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$  vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg  $\underline{a}$  koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.
- c) Bázist alkot-e  $\mathbb{R}^4$ -ben az  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$  vektorrendszer? Ha igen, határozzuk meg  $\underline{c}$  koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

2. Adjunk meg egy bázist az alábbi alterekben és határozzuk meg a dimenziójukat.

$$a) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 5x - 6y + 9z = 0 \right\} \qquad b) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

3. Legyen  $\mathbb{R}^3$ -ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2016 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el az alábbi vektorrendszerekről, hogy bázist alkotnak-e  $\mathbb{R}^3$ -ben és ha igen, határozzuk meg a hiányzó, negyedik vektor koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

- a)  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  b)  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$

4. Az alábbi  $V$  alterekben adjunk meg egy olyan bázist, amely a megadott  $\underline{v}$  vektort tartalmazza, valamint határozzuk meg  $V$  dimenzióját.

a)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokból áll, amelyekben a felső két koordináta összege megegyezik az alsó kettő összegével;  $\underline{v}$ -nek mind a négy koordinátája 1.

b)  $V$  azokból az  $\mathbb{R}^{100}$ -beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak;  $\underline{v}$  ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7.

5. A  $V \leq \mathbb{R}^n$  altérre  $\dim V = k$  és a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  vektorok generátorrendszert alkotnak  $V$ -ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  bázis  $V$ -ben?

6. Legyenek  $\underline{u}, \underline{v}$  és  $\underline{w}$  lineárisan független vektorok  $\mathbb{R}^n$ -ben. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az  $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}, \underline{b} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}, \underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$  vektorok szintén lineárisan függetlenek? ( $\approx$ ZH, 2004. december 14.)

7. Jelölje  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  és  $\underline{a}$  a jobbra látható vektorokat. Adjunk meg  $\mathbb{R}^4$ -ben egy, az  $\underline{u}, \underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az  $\underline{a}$  koordinátavektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Jelölje  $\underline{b}_1, \underline{b}_2$  és  $\underline{v}$  a jobbra látható vektorokat. A  $p$  paraméter milyen értékére igaz a  $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$  állítás? A  $p$ -nek erre az értékére határozzuk meg a  $[\underline{v}]_B$  koordinátavektort, ahol  $B$  a  $\underline{b}_1, \underline{b}_2$  vektorrendszert jelöli.

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}$$

9. Tegyük fel, hogy  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  bázis a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altérben. A  $p$  paraméter mely értékeire teljesül, hogy a  $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$  vektorok szintén bázist alkotnak  $V$ -ben?

10. Határozzuk meg a MÁSODIK GYAKORLAT 7. feladatában definiált  $\mathbb{R}^5$ -beli altér dimenzióját.

11. Megadható-e

a)  $\mathbb{R}^4$ -ben négy darab vektor úgy, hogy közülük bármely kettő lineárisan független legyen, de semelyik három ne legyen lineárisan független? (ZH, 2014. október 20.)

b)  $\mathbb{R}^5$ -ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az? (ZH, 2014. december 15.)

c)  $\mathbb{R}^4$ -ben hat darab vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson  $\mathbb{R}^4$ -ben, de semelyik 4 sem alkosson generátorrendszert  $\mathbb{R}^4$ -ben? (ZH, 2014. december 19.)

12. Tudjuk, hogy a  $V \leq \mathbb{R}^n$  altérben a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$  vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a  $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$  altér? ( $\approx$ ZH, 2007. október 24.)

13. Az  $\mathbb{R}^{99}$ -beli  $V$  és  $W$  alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy  $V$ -nek és  $W$ -nek van a nullvektortól különböző közös eleme.