BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE I.

MÁSODIK GYAKORLAT, 2016. szeptember 13.,16.

1. Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^4$-ben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyeknek minden koordinátája 0 és 1 között van (megengedve a 0-t és az 1-et is).

b) W azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból áll, amelyekben az első koordináta egyenlő a negyedikkel.

2. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\4\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\20\\201\\2015\end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{a}$ b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{b}$ c) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$

---

3. Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^6$-ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b) W azokból az $\mathbb{R}^6$-beli vektorokból áll, amelyekben a felső három koordináta összege megegyezik az alsó három összegével.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},\ \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{b}=\begin{pmatrix}7\\6\\-5\end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{a}$ c) $\underline{u}$, $\underline{a}$ d) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{b}$ e) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{b}$

5. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben (egy tetszőleges n-re). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

6. A $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy $\underline{v}_1$ benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2,\underline{v}_3,\dots,\underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1=\underline{0}$.

---

7. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben? (ZH, 2012. október 18.)

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszerek generált alterét. Amennyiben ez az altér egyenes vagy sík, adjuk meg az egyenlet(rendszer)ét.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\15\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$

9. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ a jobbra látható, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok.

a) Mutassuk meg, hogy $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan függetlenek.

b) Kiegészíthető-e $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ egyetlen további vektorral úgy, hogy ezzel generátorrendszert kapjunk $\mathbb{R}^4$-ben?

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

10. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli vektorok (valamely n-re) és legyen $\underline{u}=\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{v}=\underline{b}-\underline{c}$ és $\underline{w}=\underline{c}+2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is lineárisan független.

11. Határozzuk meg az $x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, melyre a P-t a $(7;12;4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re. (ZH, 2015. október 22.)

12. A p paraméter milyen értékére esnek egy síkba az $A(2;3;3)$, $B(3;4;1)$, $C(4;6;2)$ és $D(p;2;5)$ pontok? (ZH, 2014. október 20.)

13. Párhuzamos-e az $\frac{5x+3}{10}=\frac{4-y}{5}=\frac{5-2z}{2}$ egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszésvonalával? (ZH, 2014. december 19.)