Bevezetés a Számításelméletbe I.

Első gyakorlat, 2024. szeptember 3.

1. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $81 \equiv 43 \pmod{19}$ b) $4567890 \equiv -135790 \pmod{100}$

c) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$ d) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$

2. Igazak-e az alábbi állítások (minden szóba jövő esetben)?

a) Ha $x \equiv 3 \pmod{2222}$, akkor $x \equiv 3 \pmod{1111}$.

b) Ha $x \equiv 4 \pmod{2024}$, akkor $x \equiv 14 \pmod{2014}$.

---

3. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $111 \equiv -701 \pmod{7}$ b) $12345671234567 \equiv 76543217654321 \pmod{9}$

c) $110110101_{②} \equiv 1000101101_{②} \pmod{8}$ d) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$

4. Az x egész számra $x \equiv 7 \pmod{555}$ teljesül. Igazak-e az alábbi állítások (minden szóba jövő esetben)?

a) $x + 10 \equiv 17 \pmod{555}$ b) $3x \equiv 21 \pmod{555}$

c) $3x \equiv 21 \pmod{1665}$ d) $x^2 \equiv 49 \pmod{555}$

e) $2^x \equiv 2^7 \pmod{555}$ f) $x^{100} \equiv 7^{100} \pmod{555}$

5. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?

a) $149 \equiv 139 \pmod{m}$ b) $2024 \equiv 2025 \pmod{m}$

6. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, aminek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

---

8. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $22^{23} + 24 \equiv 25 \pmod{11^{12}}$ b) $64 \cdot 2024^{2024} \equiv 157 \cdot 2024^{2024} \pmod{31}$

9. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?

a) $m + 13 \equiv m + 18 \pmod{m}$ b) $7m + 9 \equiv m^2 + 9 \pmod{m}$

c) $13 \equiv 613 \pmod{m}$ és $23 \equiv 617 \pmod{m}$ d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \pmod{m}$

10. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra. (ZH, 2014. december 19.)

a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.

b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

11. Melyek azok a p prímszámok, amikre $p + 10$ és $p + 14$ is prím?

12.a) Hány pozitív osztója van 8800-nak?

b) Hány közös pozitív osztója van 8800-nak és 99000-nek?

13. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.

14.a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint a zárakkal szórakoznak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján k-t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?

15. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok? (Vagyis: melyek azok a p prímek, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$?)