Bevezetés a Számításelméletbe I.
Első gyakorlat, 2020. szeptember 15-16.

1. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $100 \equiv 43 \pmod{19}$
b) $50 \equiv -17 \pmod{11}$
c) $10000 \equiv 4300 \pmod{19}$

2. Milyen maradékot ad
a) 70^{70} 23-mal osztva;
b) 2020^{6543} 2021-gyel osztva?

3. Határozzuk meg az összes olyan x számot, melyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.
a) $3x \equiv 2 \quad (5)$
b) $32x \equiv 12 \quad (82)$
c) $20x \equiv 7 \quad (50)$
d) $5x \equiv 1 \quad (28)$

---

4. Igazak-e az alábbi állítások?
a) $1234567 \equiv 7654321 \pmod{9}$
b) $3456789 \equiv -9876543 \pmod{100}$
c) $30^{2020} \equiv 69^{2020} \pmod{13}$

5. Milyen maradékot ad
a) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;
b) 55^{100} 48-cal osztva;

6. Határozzuk meg az összes olyan x számot, melyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.
a) $8x \equiv 30 \quad (28)$
b) $2x \equiv 7 \quad (33)$
c) $47x \equiv 1 \quad (53)$
d) $9x \equiv 1 \quad (88)$

7. a) Hány pozitív osztója van 8800-nak?
b) Hány közös pozitív osztója van 8800-nak és 99000-nek?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

---

9. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
a) 2001^{2020}
b) $99^{77^{55}}$
c) 51^{151}
d) $\frac{51^{151}}{9}$

10. Határozzuk meg az összes olyan x számot, melyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.
a) $8x \equiv 29 \quad (27)$
b) $32x \equiv 7 \quad (47)$
c) $47x \equiv 13 \quad (95)$
d) $74x \equiv 13 \quad (111)$

11. Milyen maradékot ad
a) 1025^{1005} 1023-mal osztva;
b) 138^{139} 65-tel osztva?

12. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?
a) $149 \equiv 139 \quad (m)$
b) $2020 \equiv 2021 \quad (m)$
c) $13 \equiv 613 \quad (m)$ és $23 \equiv 617 \pmod{m}$
d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \quad (m)$

13. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra. (ZH, 2014. december 19.)
a) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{39}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{39}$.
b) Ha $n^2 \equiv 1 \pmod{39}$, akkor $n \equiv 1 \pmod{13}$ vagy $n \equiv -1 \pmod{13}$.

14. Határozzuk meg az összes olyan n egészt, amelyre $5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$ teljesül. (ZH, 2005. május 5.)

15. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, amelynek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

16. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra $(a+b, c+d) \mid a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}$ teljesül, (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli). (ZH, 2007. május 10.)

17. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.