BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE I.
TIZENHARMADIK GYAKORLAT, 2021. december 8.

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (2;3)$ vektorhoz a $(2;5)$-öt, a $\underline{b}_2 = (0;2)$-höz a $(2;1)$-et rendeli.
a) Adjuk meg f-nek az $[f]_B$ mátrixát a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerint.
b) Határozzuk meg α és β értékét, ha f az $\alpha\underline{b}_1 + \underline{b}_2$ vektorhoz az $3\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2$ vektort rendeli.
c) Adjuk meg f-nek az $[f]$ mátrixát.
d) Mit rendel f a $(4;6)$ vektorhoz?

2. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az $\underline{u}$, $\underline{v}$, illetve $\underline{w}$ vektorok?
b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (0;1)$ vektorhoz és a $\underline{b}_2 = (4;1)$ vektorhoz is a $(8;1)$ vektort rendeli. Határozzuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

4. A jobbra látható A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét. (ZH, 2010. december 15.)

5. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10;20;30)$. (ZH, 2014. december 15.)

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x,y) \mapsto (2x+y, 3x+4y)$.
a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.
b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben egy $[f]$ sajátvektoraiból álló B bázist és írjuk fel $[f]_B$-t ebben a bázisban.

7. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)
a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak.
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát. (ZH, 2011. december 5.)

---

8. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1;0;0),\ \underline{b}_2 = (2;1;0),\ \underline{b}_3 = (2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat. (ZH, 2014. november 27.)

9. Sajátértéke-e a 3 a jobbra látható A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát. (ZH, 2014. november 27.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ egy bázis $\mathbb{R}^2$-ben és legyen $[f]_B$ a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. ($\approx$ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

11. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x,y,z) \mapsto (0, 3x+4y+z, 6x+2y+5z)$.
a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.
b) Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

12. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. A p paraméter milyen értékeire teljesül az $5\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \operatorname{Ker} f$ állítás?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1 = (1,0)$ és $\underline{b}_2 = (1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. ($\approx$ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

14. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $n \times n$-es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora
a) A-nak; b) A^2-nek? ($\approx$ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)