B E V E Z E T É S A S Z Á M Í T Á S E L M É L E T B E I .
TIZENHARMADIK GYAKORLAT, 2020. december

1. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az $\underline{u}$, $\underline{v}$, illetve $\underline{w}$ vektorok?

b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

2. A jobbra látható A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2010. december 15.)

3. Sajátértéke-e a 3 a jobbra látható A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát. (ZH, 2014. november 27.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Adjuk meg a jobbra látható mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak.

b) Adjuk meg A egy sajátvektorát. (ZH, 2011. december 5.)

---

6. Adjuk meg a jobbra látható mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $n \times n$-es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora

a) A-nak; b) A^2-nek?

(≈ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)

8. Mutassuk meg, hogy ha az A négyzetes mátrixnak nincs valós sajátértéke, akkor van inverze és az inverzének sincs valós sajátértéke.

9. Az $(n\times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.) (ZH, 2014. október 20.)