B E V E Z E T É S A S Z Á M Í T Á S E L M É L E T B E I .
TIZENHARMADIK GYAKORLAT, 2017. december 5-8.

1. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az $\underline{u}$, $\underline{v}$, illetve $\underline{w}$ vektorok?

b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

2. A jobbra látható A mátrixról és $\underline{v}$ vektorról tudjuk, hogy $\underline{v}$ sajátvektora A-nak.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.

b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét. (ZH, 2010. december 15.)

3. Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak.

b) Adjuk meg A egy sajátvektorát. (ZH, 2011. december 5.)

4. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y) \mapsto (2x+y, 3x+4y)$.

a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben egy $[f]$ sajátvektoraiból álló B bázist és írjuk fel $[f]_B$-t ebben a bázisban.

---

5. Sajátértéke-e a 3 a jobbra látható A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát. (ZH, 2014. november 27.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z)$.

a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

b) Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

7. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $n \times n$-es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora

a) A-nak; b) A^2-nek? (≈ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)

8. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

a) Mutassuk meg, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ mátrixok sajátértékei azonosak.

b) Igaz-e, hogy az $[f]$ és az $[f]_B$ karakterisztikus polinomjai is megegyeznek?