

1. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (2; 3)$ vektorhoz a $(2; 5)$ -öt, a $\underline{b}_2 = (0; 2)$ -höz a $(2; 1)$ -et rendeli.
 a) Adjuk meg f -nek az $[f]_B$ mátrixát a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis szerint.
 b) Határozzuk meg α és β értékét, ha f az $\alpha\underline{b}_1 + \underline{b}_2$ vektorhoz az $3\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2$ vektort rendeli.
 c) Adjuk meg f -nek az $[f]$ mátrixát.
 d) Mit rendel f a $(4; 6)$ vektorhoz?

2. a) Sajátvektorai-e az alábbi A mátrixnak az \underline{u} , \underline{v} , illetve \underline{w} vektorok?
 b) Keressük meg A összes sajátértékét és mindegyikhez adjunk meg egy ahhoz tartozó sajátvektort is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció a $\underline{b}_1 = (0; 1)$ vektorhoz és a $\underline{b}_2 = (4; 1)$ vektorhoz is a $(8; 1)$ vektort rendeli. Határozzuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

4. A jobbra látható A mátrixról és \underline{v} vektorról tudjuk, hogy \underline{v} sajátvektora A -nak.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ p & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.

- b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét.

(ZH, 2010. december 15.)

5. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis \mathbb{R}^3 -ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg a \underline{b}_2 vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2014. december 15.)

6. Az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 4y)$.

- a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

- b) Adjunk meg \mathbb{R}^2 -ben egy $[f]$ sajátvektoraiból álló B bázist és írjuk fel $[f]_B$ -t ebben a bázisban.

7. Az 5×5 -ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)

- a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A -nak.

- b) Adjuk meg A egy sajátvektorát.

(ZH, 2011. december 5.)

8. Az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az \mathbb{R}^3 -beli $B = \{\underline{b}_1 = (1; 0; 0), \underline{b}_2 = (2; 1; 0), \underline{b}_3 = (2; 2; 1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat. (ZH, 2014. november 27.)

9. Sajátértéke-e a 3 a jobbra látható A mátrixnak? Ha igen, adjuk meg az A egy 3-hoz tartozó sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2014. november 27.)

10. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ egy bázis \mathbb{R}^2 -ben és legyen $[f]_B$ a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$. (\approx ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

11. Az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya: $f : (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z)$.

- a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

- b) Van-e \mathbb{R}^3 -ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)?

Ha igen, adjunk meg egy ilyen B -t és írjuk fel $[f]_B$ -t.

12. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis \mathbb{R}^3 -ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. A p paraméter milyen értékeire teljesül az $5\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + p \cdot \underline{b}_3 \in \text{Ker } f$ állítás?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az f mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 0)$ és $\underline{b}_2 = (1, 1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre f az $(y, 3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét. (\approx ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

14. Legyenek \underline{u} és \underline{v} az $n \times n$ -es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora

- a) A -nak;

- b) A^2 -nek?

(\approx ZH, 2013. december 9., 2013. december 17.)