

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki. (ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

3. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (ZH, 2011. november 24.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

5. Legyen A $n \times n$ -es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

6. Legyen A a jobbra látható mátrix.

a) Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre $A \cdot B$ a 2×2 -es egységmátrix.

b) Létezik-e olyan B mátrix, melyre $B \cdot A$ a 3×3 -as egységmátrix?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2017. december 11., 2017. december 18.)

7. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ZH, 2012. december 11.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

8. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3 -as egység-mátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét. (ZH, 2019. december 6.)

$$\begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

9. A p valós paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját. (ZH, 2014. december 19., 2022. december 2.)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 8 & -2 \\ 3 & 13 & -9 & p \\ 2 & 14 & 10 & p-13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$

10. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $r(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli). (ZH, 2006. október 26.)

11. Legyenek A és B 3×3 -as mátrixok, melyekre $r(A) = 3$ és $r(B) = 2$ teljesülnek (ahol r -rel a mátrixok rangját jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (A és B választásától függően).

a) $r(A^3) = 3$

b) $r(B^3) = 3$

c) $r(B^3) = 2$

(A^3 , illetve B^3 az $A \cdot A \cdot A$, illetve a $B \cdot B \cdot B$ szorzatot jelöli.)

(ZH, 2010. december 15.)

12. Az $n \times n$ -es A mátrixot akkor nevezzük *nulloztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$ -es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nulloztó, akkor $\det A = 0$.

b) Ha $\det A = 0$, akkor A nulloztó.

(ZH, 2006. október 26.)

13. A 6×6 -os A mátrixra $r(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $r(B) = r(C) = 2$ és $A = B + C$. (ZH, 2014. november 27.)

14. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások fennállnak tetszőleges A és B mátrixokra (feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők rajtuk).

a) $r(A \cdot B) \leq r(A)$

b) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$