Bevezetés a Számításelméletbe I.
Tizedik gyakorlat, 2024. november 19.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki. (ZH, 2012. december 3.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

---

3. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk is ki.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ (ZH, 2011. november 24.)

4. A p valós paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját. (ZH, 2014. december 19.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 8 & -2 \\ 3 & 13 & -9 & p \\ 2 & 14 & 10 & p-13 \end{pmatrix}$$

5. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

6. Legyen A a jobbra látható mátrix.

a) Adjunk meg egy olyan B mátrixot, melyre $A \cdot B$ a 2×2-es egységmátrix.

b) Létezik-e olyan B mátrix, melyre $B \cdot A$ a 3×3-as egységmátrix?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2017. december 11., 2017. december 18.)

---

7. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egység-mátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét. (ZH, 2019. december 6.)

$$\begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

8. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak először a 4×4-es, utána a 100×100-as esetben; ha létezik, akkor számítsuk is ki az inverzet.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

9. Határozzuk meg az A^{-1} és a B mátrixokat, ha az A és az $A \cdot B$ mátrixok az alábbiak. (ZH, 2018. november 29.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 777 & 666 \\ 999 & 888 \end{pmatrix}$$

10. A p valós paraméter minden értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját. (ZH, 2021. december 2.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 & -30 & 20 \\ 1 & 0 & -21 & 10 \\ -2 & -8 & p & 2p-8 \\ 2 & 9 & 3 & p \end{pmatrix}$$

11. Legföljebb hányat lehet kiválasztani az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok közül úgy, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek? (ZH, 2023. december 1.)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

12. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli). (ZH, 2006. október 26.)

13. Legyenek A és B 3×3-as mátrixok, melyekre $\mathrm{r}(A) = 3$ és $\mathrm{r}(B) = 2$ teljesülnek (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz; *(ii)* az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (A és B választásától függően).

a) $\mathrm{r}(A^3) = 3$ b) $\mathrm{r}(B^3) = 3$ c) $\mathrm{r}(B^3) = 2$

(A^3, illetve B^3 az $A \cdot A \cdot A$, illetve a $B \cdot B \cdot B$ szorzatot jelöli.) (ZH, 2010. december 15.)

14. Az $n \times n$-es A mátrixot akkor nevezzük *nullosztónak*, ha létezik egy olyan $(n \times n)$-es $B \neq 0$ mátrix, amelyre $A \cdot B = 0$ (ahol 0 a csupa nulla mátrixot jelöli). Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások:

a) Ha A nullosztó, akkor $\det A = 0$. b) Ha $\det A = 0$, akkor A nullosztó. (ZH, 2006. október 26.)

15. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$. (ZH, 2014. november 27.)

16. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások fennállnak tetszőleges A és B mátrixokra (feltéve, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők rajtuk).

a) $\mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A)$ b) $\mathrm{r}(A + B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$