Bevezetés a Számításelméletbe I.

Tizedik gyakorlat, 2021. november 9.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixműveletek elvégezhetők-e és ha igen, adjuk meg az eredményt.

a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$

d) $A \cdot B + 2B$ e) $B \cdot B^T$

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét *a kifejtési tétel segítségével.*

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & \pi \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

---

3. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat. (ZH, 2019. dec. 16.)

4. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

5. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra. Az igaz egyenlőségeket lássuk be, a hamisakra mutassunk ellenpéldát. (E jelöli az $n \times n$-es egységmátrixot.)

a) $AB + B = (A + E)B$ b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ c) $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixokat. (A^n az az n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője A.)

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2020}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2021}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$

---

7. A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i,j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy minden $1 \le i,j \le 4$ esetén

$$a_{i,j} = \begin{cases} i + j, & \text{ha } j = 1,2, \\ 9 - i - j, & \text{ha } j = 3,4; \end{cases} \quad \text{és} \quad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1,3, \\ 1 - j, & \text{ha } i = 2,4, \end{cases}$$ (ZH, 2011. dec. 5.)

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot. b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát.

8. Oldjuk meg az $A \cdot X = B$ „mátrixegyenletet” az alábbi A és B mátrixokra (vagyis határozzuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre $A \cdot X = B$ teljesül).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 16 & 0 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét minden p valós szám esetén. (ZH, 2017. dec. 11.)

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

10. a) Számítsuk ki az alábbi A és B mátrixok 2008-adik hatványát. (ZH, 2008. okt. 21., 2008. dec. 2.)

b) A kapott eredményekből mire lehet következtetni a két mátrix determinánsára vonatkozóan?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

11. Határozzuk meg az összes olyan Y mátrixot, amelyre $Y \cdot A = B$ teljesül, ahol az A és B mátrixok az alábbiak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 11 \\ -3 & -7 & 12 & -11 \\ 5 & 7 & -18 & 22 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$ (ZH, 2008. okt. 21.)

12. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1 és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét. (ZH, 2012. dec. 11.)

13. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra. (E-vel jelöltük az egységmátrixot.)

a) Ha van olyan $k \ge 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \ge 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$. (ZH, 2012. okt. 18.)

14. Mutassuk meg, hogy bármely $n \times n$-es, nemnulla determinánsú mátrix minden sora tartalmaz olyan elemet, amelynek (de csak annak) az alkalmas megváltoztatásával elérhető, hogy a mátrix determinánsa nullává változzon.

15. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (ZH, 2014. okt. 20.)