Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus

Kilencedik gyakorlat, 2024. november 12.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Döntsük el, hogy az alábbi mátrixműveletek elvégezhetők-e és ha igen, adjuk meg az eredményt.

a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$

2. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét minden p valós szám esetén. (ZH, 2017. december 11.)

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$$

---

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixokat. (A^n az az n tényezős szorzat, amelynek minden tagja A.)

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2024}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2024}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2024}$

4. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra. (E jelöli az $n \times n$-es egységmátrixot.)

a) $AB + B = (A + E)B$ b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ c) $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$

5. Egy $2k \times 2k$-as mátrix főátlójának minden eleme γ, a bal alsó sarkot a jobb felső sarokkal összekötő átló minden eleme δ, a többi elem pedig 0. Számítsuk ki a mátrix determinánsát.

6. Az $(n \times n)$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk. (A^3 azt a háromtényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tényezője A.) (ZH, 2014. október 20.)

7. Legyen $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ négy tetszőleges térbeli pont. Bizonyítsuk be, hogy ezek akkor és csak akkor esnek egy síkba, ha a jobbra látható determináns értéke 0.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

---

8. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk róla ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat. (ZH, 2019. december 16.)

9. Az $n \times n$-es A mátrix főátlójának minden eleme $\frac{n-2}{n}$, a mátrix összes többi eleme $\frac{-2}{n}$. Határozzuk meg az A^{2011} mátrixot. (ZH, 2011. október 20.)

10. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Jelölje B azt az $n \times n$-es mátrixot, amelyre $b_{ij} = A_{ji}$ (ahol A_{ji} az A mátrix a_{ji} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát jelöli). Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot.

11. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra. (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

12. Határozzuk meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

13. Egy $n \times n$-es, nemnulla determinánsú mátrix egyik elemét nevezzük *izgalmasnak*, ha azt (de csak azt) alkalmasan megváltoztatva elérhető, hogy a mátrix determinánsa nullává változzon.

a) Igaz-e, hogy minden nemnulla determinánsú mátrix minden eleme izgalmas?

b) Igaz-e, hogy minden nemnulla determinánsú mátrix minden sorában van izgalmas elem?

14. Egy $n \times n$-es A mátrixban a bal felső sarokban $\cos\varphi$ áll, a főátló többi eleme $2\cos\varphi$, közvetlenül a főátló alatt és fölött az összes ($2n - 2$ darab) elem 1-es, a mátrix minden más eleme pedig 0. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = \cos(n\varphi)$.

15. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen $n \geq 1$-re sem léteznek olyan A és B $n \times n$-es mátrixok, amikre $AB - BA = E$, ahol E a megfelelő méretű egységmátrixot jelöli. (ZH, 2001. december 10.)

16*. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A mátrixhoz létezik olyan $k \geq 1$ egész, amelyre $A^k = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^n = 0$.