Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Nyolcadik gyakorlat, 2024. november 5.

1. Számítsuk ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét. (ZH, 2019. december 6.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét. (ZH, 2019. december 16.)

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

---

3. Számítsuk ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsokat.

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ b) $a_{ij} = i^2j^2 + 1$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0$$

6. Az alábbi determinánsban a, b, c és d valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

(ZH, 2003. november 6.)

7. Az $n \times n$-es A mátrixban az i. sor és a j. oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = f_i(t_j)$, ahol $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ legfeljebb $n-2$ fokú polinomok és $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$.

---

8. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozzuk meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij} = \min(i, j)$ b) $a_{ij} = \log_2 i + 5j + 3$

c) $n = 101$ és $a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$ (ZH, 2004. november 4.)

9. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

(ZH, 2011. október 20.)

10. Hogyan változik meg egy 10×10-es mátrix determinánsa a következő műveletek hatására?

a) A 3. és a 7. sorhoz (tagonként) hozzáadjuk ennek a két sornak a (tagonként vett) különbségét. (A két sor különbsége alatt azt értjük, hogy a 3. sor elemeiből vonjuk ki a 7. sor megfelelő elemeit).

b) Minden $1 \leq i, j \leq 10$ esetén az i-edik sor j-edik elemét $\frac{i}{j}$-vel szorozzuk.

11. Egy $n \times n$-es A mátrix minden eleme ± 1 Bizonyítsuk be, hogy $\det A$ osztható 2^{n-1}-nel.

12. Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának. (ZH, 2008. október 21.)

13. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme egy 0 és 9 közti egész szám, így A minden sora felfogható egy n-jegyű egész számként (a tízes számrendszerben). Mutassuk meg, hogy ha ezek az n-jegyű egészek mind oszthatók 2024-gyel, akkor $\det A$ is osztható 2024-gyel.

14. Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok. Tegyük fel, hogy $\underline{a} \notin V$, de $\alpha_1\underline{a} + \beta_1\underline{b} + \gamma_1\underline{c} \in V$, $\alpha_2\underline{a} + \beta_2\underline{b} + \gamma_2\underline{c} \in V$ és $\alpha_3\underline{a} + \beta_3\underline{b} + \gamma_3\underline{c} \in V$ teljesül valamely $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ skalárokra. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a jobbra látható determináns értéke 0. (≈ZH, 2011. december 13.)

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

15*. Legyen adott egy π permutáció az $\{1, 2, \dots n\}$ halmazon. Az i számot π *fixpontjának* nevezzük, ha $\pi(i) = i$ (azaz ha a permutációban az i. helyen i áll). Egy permutáció *fixpontmentes*, ha nincs fixpontja. A fixpontmentes permutációk között miből van több: páros inverziószámúból, vagy páratlan inverziószámúból? Mennyivel? (A válasz persze n-től függhet.)