Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Hetedik gyakorlat, 2024. október 29.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2\\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1\\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34\\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= p \end{aligned}$$

---

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszereknek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset. (ZH, 2014. október 20, 2014. december 15.)

a) $$\begin{aligned} &x_1-x_2+4x_4=-2\\ &2x_1-2x_2+x_3+8x_4=-3\\ &x_1+x_2+6x_3+8x_4=2\\ &3x_1-3x_2+p\cdot x_3+(p^2+p+12)\cdot x_4=-6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &x_1-x_2+5x_3+x_4+2x_5=1\\ &2x_1-2x_2+10x_3+5x_4+10x_5=5\\ &5x_1-2x_2+19x_3+14x_4+x_5=17\\ &2x_1+6x_3+p\cdot x_4+(3p-27)\cdot x_5=p+2 \end{aligned}$$

3. Bázist alkotnak-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorrendszerek? Ha igen, adjuk meg az alábbi $\underline{v}$ vektor koordinátavektorát az adott bázisban.

a) $\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\23\\0\\17\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-9\\11\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\12\\-2\\7\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}$ $\underline{v}=\begin{pmatrix}3\\5\\8\\9\end{pmatrix}$

4. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022? (ZH, 2021. december 2.)

5. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

a) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= n\\ x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_n &= n-1\\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+3x_n &= n-2\\ \vdots\qquad &\vdots\quad \vdots\\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 1\\ x_2+x_3 &= 1\\ \vdots\quad &\vdots\ \vdots\\ x_{n-1}+x_n &= 1\\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

---

6. A p valós paraméter milyen értékeire alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben a $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3,\underline{b}_4\}$ vektorrendszer? A p-nek ezekre az értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.

$$\underline{b}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\11\\13\end{pmatrix},\ \underline{b}_2=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\15\\12\end{pmatrix},\ \underline{b}_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-19\\4\\19\end{pmatrix},\ \underline{b}_4=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\9\\-5\\p\end{pmatrix}\ \text{és}\ \underline{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-5\\-48\\-19+3p\end{pmatrix}$$

7. A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg jobbra látható egyenletrendszer megoldásainak számát. (ZH, 2023. december 1.)

$$\begin{aligned} -x_1-4x_2+3x_3+5x_4 &= 0\\ 2x_1+5x_2-24x_3+(3p-1)\cdot x_4 &= 0\\ 3x_1+17x_2+22x_3+(q-5p)\cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

8. Jelölje $\underline{b}_i$ ($i=1,2,\ldots,n$) azt az $\mathbb{R}^n$-beli vektort, amelynek az i-edik koordinátája i, az összes többi koordinátája 1. Jelölje $\underline{v}$ azt az $\mathbb{R}^n$-beli vektort, amelynek az i-edik koordinátája i (minden $i=1,\ldots,n$ esetén). Mutassuk meg, hogy $B=\{\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n\}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben és határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.

9. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy az megoldható és a megoldása egyértelmű. Ha most megváltoztatjuk az egyenletek jobb oldalán álló számokat (de csak azokat), előfordulhat-e, hogy a kapott egyenletrendszernek

a) nincs megoldása; b) végtelen sok megoldása van?

10. a) Frédi gondolt húsz valós számot, ezek $x_1,x_2,\ldots,x_{20}$. Béni megkérdezheti tőle bármely, az x_i-kből képzett, egész együtthatós, lineáris kifejezés értékét (például mennyi $2x_1-x_7+5x_{11}$). (A következő kérdés mindig függhet a korábbi válaszoktól.) Legkevesebb hány kérdéssel tudja kitalálni Béni a húsz számot?

b) Mennyiben változik a helyzet, ha Frédi elárulta, hogy csak pozitív egészekre gondolt?

11. a) Ha egy n ismeretlenes, k egyenletből álló lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, akkor a tanult tétel szerint $k\geq n$. Adjunk új bizonyítást az FG-egyenlőtlenségre ennek a tételnek a felhasználásával.

b) És fordítva: lássuk be az FG-egyenlőtlenségből a $k\geq n$ állítást.

12. Milyen n és m esetén egyértelműen megoldható az alábbi ($n\times n$-es) lineáris egyenletrendszer?

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 &+& x_2 &+& \ldots &+& x_m &=& 1\\ x_2 &+& x_3 &+& \ldots &+& x_{m+1} &=& 1\\ \vdots && \vdots && \ddots && \vdots && \vdots\\ x_n &+& x_1 &+& \ldots &+& x_{m-1} &=& 1 \end{array}$$

13. Az A mátrix sorait jelölje $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_m$, a b oszlopvektor komponenseit jelölje $b_1,\ldots,b_m$. Bizonyítsuk be, hogy az $(A|b)$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha nem léteznek olyan $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ skalárok, amikre $\lambda_1\underline{a}_1+\ldots+\lambda_m\underline{a}_m=\underline{0}$ és $\lambda_1b_1+\ldots+\lambda_mb_m\neq 0$.