

1. Határozzuk meg az alábbi alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami a csupa 1 koordinátájú vektort tartalmazza. Végül a kapott bázisban határozzuk meg \underline{w} koordinátavektorát.

$$\text{a) } V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y + 4z = 0 \right\}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \right\}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi V alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami tartalmazza a megadott \underline{v}_i vektorokat. Végül a kapott bázisban határozzuk meg \underline{w} koordinátavektorát.

$$\text{a) } V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}, \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) V azokból az \mathbb{R}^{100} -beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak; \underline{v}_1 ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7, \underline{w} első koordinátája pedig 100.

3. A $V \leq \mathbb{R}^n$ altérre $\dim V = k$ és a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak V -ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ bázis V -ben?

4. Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ és \underline{w} lineárisan független vektorok \mathbb{R}^n -ben. A p valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a} = \underline{u} - \underline{v}$, $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{c} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\underline{d} = p \cdot \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (\approx ZH, 2004. december 14.)

5. Következik-e (i)-ből (ii), illetve (ii)-ből (i) az \mathbb{R}^n -beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ vektorokról szóló alábbi állítások esetében?
(i) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100}$ közül kiválasztható 50 úgy, hogy ezek lineárisan függetlenek legyenek, de 51 már nem.
(ii) $\dim\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{100} \rangle = 50$

6. Jelölje $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ és \underline{a} a jobbra látható vektorokat. Adjunk meg \mathbb{R}^4 -ben egy, az $\underline{u}, \underline{v}$ és \underline{w} vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az \underline{a} koordináta-vektorát.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7. Határozzuk meg a **ÖTÖDIK GYAKORLAT 4/a**, illetve **8.** feladatában definiált alterek dimenzióját.

8. Megadható-e \mathbb{R}^5 -ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az? (ZH, 2014. december 15.)

9. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak \mathbb{R}^4 -ben. Határozzuk meg az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{c} + \underline{d}, \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját. (ZH, 2017. november 30.)

10. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ és a $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ vektorrendszerek egyaránt lineárisan függetlenek a (tetszőleges) $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Mutassuk meg, hogy ha $k < m$, akkor létezik olyan $1 \leq i \leq m$, amelyre

- a) a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}_i$ rendszer lineárisan független; (\approx ZH, 2012. december 11.)
- b) a $\underline{v}_1 + \underline{w}_i, \underline{v}_2 + \underline{w}_i, \dots, \underline{v}_k + \underline{w}_i$ rendszer lineárisan független; (\approx ZH, 2011. december 13.)

11. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_k\}$ két bázis a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V -ben. (\approx ZH, 2012. október 18.)

12. A 100 dimenziós $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak V -ben. (\approx ZH, 2011. október 20.)

13. Az \mathbb{R}^{99} -beli V és W alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy V -nek és W -nek van a nullvektortól különböző közös eleme. (\approx ZH, 2002. október 31.)

14.a) Van-e az **ÖTÖDIK GYAKORLAT 8.** feladatában definiált altérnek olyan bázisa, amelyben minden vektor koordinátái felülről lefelé mértani sorozatok alkotnak?

b) Írjunk fel képletet a Fibonacci-sorozat n -edik tagjának meghatározására.

15*. Legyen adott egy olyan (tetszőlegesen sok egyenletből álló) lineáris egyenletrendszer az x_1, x_2, \dots, x_n változókon, amelyben az egyenletek jobb oldalán álló konstans tag mindenhol 0. Álljon V azokból az \mathbb{R}^n -beli oszlopvektorokból, amelyeknek a koordinátáit sorra az x_1, x_2, \dots, x_n változóba helyettesítve az egyenletrendszer megoldását kapjuk. Könnyű megmutatni (tegyük is meg), hogy ekkor V altér \mathbb{R}^n -ben. Igaz-e, hogy \mathbb{R}^n minden altere megkapható ezen a módon?