Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Hatodik gyakorlat, 2024. október 22.

**1.** Határozzuk meg az alábbi alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami a csupa 1 koordinátájú vektort tartalmazza. Végül a kapott bázisban határozzuk meg $\underline{w}$ koordinátavektorát.

a) $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : 3x-7y+4z=0\right\}$, $\underline{w}=\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}$ b) $W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : 5x_1-8x_2+4x_3-x_4=0\right\}$, $\underline{w}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}$

---

**2.** Határozzuk meg az alábbi $V$ alterek dimenzióját és adjunk meg bennük egy olyan bázist, ami tartalmazza a megadott $\underline{v}_i$ vektorokat. Végül a kapott bázisban határozzuk meg $\underline{w}$ koordinátavektorát.

a) $V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\right\}, \underline{v}_1=\begin{pmatrix}3\\-5\\-2\\7\end{pmatrix}, \underline{v}_2=\begin{pmatrix}4\\-7\\3\\-1\end{pmatrix}, \underline{w}=\begin{pmatrix}7\\-12\\1\\6\end{pmatrix}$

b) $V$ azokból az $\mathbb{R}^{100}$-beli vektorokból áll, amelyeknek a koordinátái felülről lefelé 2 kvóciensű mértani sorozatot alkotnak; $\underline{v}_1$ ezek közül az, amelynek az első koordinátája 7, $\underline{w}$ első koordinátája pedig 100.

**3.** A $V\le\mathbb{R}^n$ altérre $\dim V=k$ és a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak $V$-ben. Igaz-e mindig, hogy ekkor $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ bázis $V$-ben?

**4.** Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. A $p$ valós paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $\underline{a}=\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{b}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{c}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\underline{d}=p\cdot\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ vektorok szintén lineárisan függetlenek? (≈ZH, 2004. december 14.)

**5.** Következik-e *(i)*-ből *(ii)*, illetve *(ii)*-ből *(i)* az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{100}$ vektorokról szóló alábbi állítások esetében?
*(i)* $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{100}$ közül kiválasztható 50 úgy, hogy ezek lineárisan függetlenek legyenek, de 51 már nem.
*(ii)* $\dim\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{100}\rangle=50$

---

**6.** Jelölje $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{a}$ a jobbra látható vektorokat. Adjunk meg $\mathbb{R}^4$-ben egy, az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokat tartalmazó bázist, majd írjuk fel ebben a bázisban az $\underline{a}$ koordinátavektorát.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\4\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\6\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\underline{a}=\begin{pmatrix}8\\9\\11\\-1\end{pmatrix}$$

**7.** Határozzuk meg a Negyedik gyakorlat **4**/a, illetve **8**. feladatában definiált alterek dimenzióját.

**8.** Megadható-e $\mathbb{R}^5$-ben öt darab vektor úgy, hogy közülük bármely három által alkotott rendszer lineárisan független legyen, de semelyik négy által alkotott rendszer ne legyen az? (ZH, 2014. december 15.)

**9.** Tudjuk, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{c}+\underline{d}$, $\underline{a}+\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját. (ZH, 2017. november 30.)

**10.** Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k$ és a $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\dots,\underline{w}_m$ vektorrendszerek egyaránt lineárisan függetlenek a (tetszőleges) $V\le\mathbb{R}^n$ altérben. Mutassuk meg, hogy ha $k<m$, akkor létezik olyan $1\le i\le m$, amelyre
a) a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k,\underline{w}_i$ rendszer lineárisan független; (≈ZH, 2012. december 11.)
b) a $\underline{v}_1+\underline{w}_i,\underline{v}_2+\underline{w}_i,\dots,\underline{v}_k+\underline{w}_i$ rendszer lineárisan független; (≈ZH, 2011. december 13.)

**11.** Legyen $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_k\}$ és $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\dots,\underline{c}_k\}$ két bázis a $V\le\mathbb{R}^n$ altérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i\in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j\in C$, hogy $B\setminus\{\underline{b}_i\}\cup\{\underline{c}_j\}$ és $C\setminus\{\underline{c}_j\}\cup\{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok $V$-ben. (≈ZH, 2012. október 18.)

**12.** A 100 dimenziós $V\le\mathbb{R}^n$ altérben adott 100 különböző bázis. Bizonyítsuk be, hogy a 100 adott bázis mindegyikéből kiválasztható egy-egy vektor úgy, hogy a kiválasztott vektorok együtt szintén bázist alkossanak $V$-ben. (≈ZH, 2011. október 20.)

**13.** Az $\mathbb{R}^{99}$-beli $V$ és $W$ alterek egyaránt 50 dimenziósak. Mutassuk meg, hogy $V$-nek és $W$-nek van a nullvektortól különböző közös eleme. (≈ZH, 2002. október 31.)

**14.** a) Van-e a Negyedik gyakorlat **8.** feladatában definiált altérnek olyan bázisa, amelyben minden vektor koordinátái felülről lefelé mértani sorozatok alkotnak?
b) Írjunk fel képletet a Fibonacci-sorozat $n$-edik tagjának meghatározására.

**15*.** Legyen adott egy olyan (tetszőlegesen sok egyenletből álló) lineáris egyenletrendszer az $x_1,x_2,\dots,x_n$ változókon, amelyben az egyenletek jobb oldalán álló konstans tag mindenhol 0. Álljon $V$ azokból az $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektorokból, amelyeknek a koordinátáit sorra az $x_1,x_2,\dots,x_n$ változókba helyettesítve az egyenletrendszer megoldását kapjuk. Könnyű megmutatni (tegyük is meg), hogy ekkor $V$ altér $\mathbb{R}^n$-ben. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^n$ minden altere megkapható ezen a módon?