Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus
Hatodik gyakorlat, 2023. október 17.

1. Legyen $\mathbb{R}^4$-ben

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ és }\underline{d}=\begin{pmatrix}2\\20\\202\\2023\end{pmatrix}.$$

a) Határozzuk meg az $\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$ generált alteret úgy, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amivel egy tetszőleges $\mathbb{R}^4$-beli vektorról nagyon egyszerűen megmondható, hogy benne van-e.

b) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ vektorok?

---

2. Az **1.** feladatban bevezetett vektorokra határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret („gyorsteszt” készítésével), majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{a}$ b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{c}$ c) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

3. Tudjuk, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a},\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\underline{c}$ rendszer is lineárisan független? (ZH, 2020. december 14.)

4. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-3\underline{d}$, $\underline{a}+\underline{c}+5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d}\in\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle$? (ZH, 2022. október 18.)

5. A $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n\in\mathbb{R}^{2023}$ vektorokra $\underline{v}_1$ benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2,\underline{v}_3,\ldots,\underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Adjuk meg $\underline{v}_1$-et.

6. Mutassuk meg, hogy minden $V\leq\mathbb{R}^n$ altér tetszőleges generátorrendszeréből elhagyható néhány (esetleg nulla) vektor úgy, hogy a megmaradt vektorok is V generátorrendszerét alkossák és lineárisan függetlenek legyenek.

---

7. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\text{ és }\underline{d}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e; végül válaszoljuk meg azt a kérdést, hogy a felsorolt vektorok generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben.

a) $\underline{a},\underline{b}$ b) $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ c) $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$

8. a) A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek a jobbra látható, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vektorok? (2020. október 30.)

b) A $p=-4$ értékre határozzuk meg az $\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$ generált alteret (vagyis készítsünk hozzá „gyorstesztet”).

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\p\end{pmatrix},\ \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\p\\8\end{pmatrix},\ \underline{w}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\p\end{pmatrix}$$

9. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli vektorok (valamely n-re) és legyen $\underline{u}=\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{v}=\underline{b}-\underline{c}$ és $\underline{w}=\underline{c}+2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle=\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$.

b) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független.

c) Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is lineárisan független.

10. Legyenek $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1-\underline{v}_2,\underline{v}_2-\underline{v}_3,\ldots,\underline{v}_{k-1}-\underline{v}_k,\underline{v}_k-c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek. (ZH, 1998. november 5.)

11. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k\in\mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek és $\underline{u}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{u}\neq\underline{0}$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1\leq i\leq k$, amelyre a $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{i-1},\underline{u},\underline{v}_{i+1},\ldots,\underline{v}_k$ vektorok szintén lineárisan függetlenek.

12.a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $\underline{v}_1+\alpha\underline{v}_2,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_k$ szintén generátorrendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben minden $\alpha\in\mathbb{R}$-re.

b) Bizonyítsuk be ebből, hogy $\mathbb{R}^n$-ben minden generátorrendszer legalább n elemű.

13*. Megadható-e $\mathbb{R}^n$-ben végtelen sok vektor úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független?