

1. Legyen \mathbb{R}^4 -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 202 \\ 2024 \end{pmatrix}.$$

a) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret úgy, hogy készítünk egy olyan „gyorstesztet”, amivel egy tetszőleges \mathbb{R}^4 -beli vektorról nagyon egyszerűen megmondható, hogy benne van-e.

b) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok?

2. Az 1. feladatban bevezetett vektorokra határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret („gyorsteszt” készítésével), majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$

b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}$

c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{c}, \underline{d}$

3. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független \mathbb{R}^n -ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}, \underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{c}$ rendszer is lineárisan független? (ZH, 2020. december 14.)

4. Az \mathbb{R}^n -beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$? (ZH, 2022. október 18.)

5. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^{2024}$ vektorokra \underline{v}_1 benne van a többi $n-1$ vektor generált alterében, de a $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor generált alterében. Adjuk meg \underline{v}_1 -et.

6. Mutassuk meg, hogy minden $V \leq \mathbb{R}^n$ altér tetszőleges generátorrendszeréből elhagyható néhány (esetleg nulla) vektor úgy, hogy a megmaradt vektorok is V generátorrendszerét alkossák és lineárisan függetlenek legyenek.

7. Legyen \mathbb{R}^3 -ben

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e; végül válaszoljunk meg azt a kérdést, hogy a felsorolt vektorok generátorrendszert alkotnak-e \mathbb{R}^3 -ben.

a) $\underline{a}, \underline{b}$

b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$

c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

8. a) A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek a jobbra látható, \mathbb{R}^4 -beli $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok? (2020. október 30.)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

b) A $p = -4$ értékre határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált alteret (vagyis készítsünk hozzá „gyorstesztet”).

9. Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tetszőleges \mathbb{R}^n -beli vektorok (valamely n -re) és legyen $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}, \underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$.

b) Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ is lineárisan független.

c) Ha $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ is lineárisan független.

10. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek. (ZH, 1998. november 5.)

11. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek és $\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \underline{u} \neq \underline{0}$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq k$, amelyre a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_k$ vektorok szintén lineárisan függetlenek.

12. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszert alkotnak \mathbb{R}^n -ben, akkor $\underline{v}_1 + \alpha \underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ szintén generátorrendszert alkotnak \mathbb{R}^n -ben minden $\alpha \in \mathbb{R}$ -re.

b) Bizonyítsuk be ebből, hogy \mathbb{R}^n -ben minden generátorrendszer legalább n elemű.

13*. Megadható-e \mathbb{R}^n -ben végtelen sok vektor úgy, hogy közülük bármely n lineárisan független?