Bevezetés a Számításelméletbe I. — *EMELT SZINTŰ* kurzus

Ötödik gyakorlat, 2023. október 10.

1. a) Írjuk fel a $P(1,4,-1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2}=\frac{y-10}{-2}=\frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét.

b) Átmegy-e az origón az az egyenes, amely merőleges az $\frac{2x-1}{6}=-5-y=\frac{z}{8}$ egyenletrendszerű és az $x=y-9$, $z=7$ egyenletrendszerű egyenesekre és átmegy a $P(4;-4;3)$ ponton?

2. Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^{100}$-ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az $\mathbb{R}^{100}$-beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b) W azokból az $\mathbb{R}^{100}$-beli vektorokból áll, amelyekben a felső ötven koordináta összege megegyezik az alsó ötven összegével.

---

3. Határozzuk meg a $(2,3,4)$ pont távolságát a $3x+4y+12z+25=0$ egyenletű síktól.

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

a) számtani sorozatot alkotnak; (ZH, 2020. december 14.)

b) mértani sorozatot alkotnak? (ZH, 2020. december 21.)

5. Van-e az $A(-1;-2;1)$, $B(3;1;3)$ és $C(7;6;3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y-tengelyre esik? Ha igen, melyik? (ZH, 2017. december 11.)

6. Keressük meg az $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=z-3$ egyenletrendszerű egyenesen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $P(1;0;0)$ és a $Q(1;-2;4)$ pontoktól.

7. Az $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ halmazokra teljesül, hogy $U\leq\mathbb{R}^n$, $V\leq\mathbb{R}^n$ és $U\cup V\leq\mathbb{R}^n$. Következik-e ebből, hogy $U\subseteq V$ vagy $V\subseteq U$?

---

8. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik koordinátája a fölötte álló két koordináta összege. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben (minden $n\geq 3$ esetén)?

9. Határozzuk meg az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszerek generált alterét. Amennyiben ez az altér sík vagy egyenes, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét. (Generált altér: BSz1 jegyzet, 2.2.9. Definíció.)

a) $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\15\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$

10. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12;1;7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x-3=\frac{y-2}{3}=\frac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest. (ZH, 2010. december 6.)

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az $\frac{x-1}{2}=5-y, z=2$ egyenletrendszerű e egyenest és nincs közös pontja az $\frac{x}{7}=\frac{1-2y}{12}=8-z$ egyenletrendszerű f egyenessel. (ZH, 2022. október 18.)

12. Határozzuk meg az $A(1;5;2)$, $B(2;7;4)$ és $C(2;9;10)$ pontok által meghatározott háromszög A csúcsán átmenő (belső) szögfelezőjének az egyenletrendszerét. (ZH, 2018. december 10.)

13. Tükrözzük a $P(-1;2;3)$ pontot az $\frac{x+1}{3}=y=z$ egyenletrendszerű egyenesre.

14. Határozzuk meg az $\frac{x-11}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+8}{-2}$ egyenletrendszerű egyenes távolságát az $\frac{x-10}{4}=\frac{y+8}{-9}=\frac{z-4}{-4}$ egyenletrendszerű egyenestől.

15. Írjuk fel a $12x+5y+5z=-33$ egyenletű sík egyenletét abban a koordinátarendszerben, amelynek origója az $O(5,4,3)$ pont és az x, y és z tengelyek pozitív féltengelyei rendre átmennek az $X(7,0,7)$, $Y(7,6,4)$, illetve $Z(-1,7,9)$ pontokon.

16. Egy parallelepipedon egy csúcsából induló éleinek hossza a, b és c, a négy testátlója közül háromnak a hossza d, e és f. Határozzuk meg a hiányzó testátló hosszát.

17. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{9}=z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4}=\frac{y+8}{6}$, $z=7$ egyenletrendszerű f egyenesek *normáltranszverzálisának* az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e-t és f-et is merőlegesen metszi. (ZH, 2017. december 18.)

18*. Nevezzünk egy oszlopvektort *unalmasnak*, ha a koordinátái között legfeljebb két különböző érték fordul elő. Legkevesebb hány unalmas $\mathbb{R}^n$-beli vektort kell megadni ahhoz, hogy belőlük kifejezhető legyen (az $\mathbb{R}^n$-beli műveletekkel) az a vektor, amelynek az i-edik koordinátája $i-1$ minden $1\leq i\leq n$ esetén?