

1. a) Írjuk fel a $P(1, 4, -1)$ ponton átmenő és az $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$ egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét.

b) Átmege-e az origón az az egyenes, amely merőleges az $\frac{2x-1}{6} = -5 - y = \frac{z}{8}$ egyenletrendszerű és az $x = y - 9, z = 7$ egyenletrendszerű egyenesekre és átmege a $P(4; -4; 3)$ ponton?

2. Döntsük el, hogy \mathbb{R}^{100} -ban alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

a) V azokból az \mathbb{R}^{100} -beli vektorokból áll, amelyekben a számok fölülről lefelé (nem feltétlen szigorúan) növekvő sorrendben állnak.

b) W azokból az \mathbb{R}^{100} -beli vektorokból áll, amelyekben a felső ötven koordináta összege megegyezik az alsó ötven összegével.

3. Határozzuk meg a $(2, 3, 4)$ pont távolságát a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ egyenletű síktól.

4. Alteret alkotnak-e \mathbb{R}^4 -ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

a) számtani sorozatot alkotnak; (ZH, 2020. december 14.)

b) mértani sorozatot alkotnak? (ZH, 2020. december 21.)

5. Legyen $\underline{i} = (3; 0; -1)$ irányvektora az e és az f egyenesnek is. Az e egyenes tartalmazza a $(3; 1; 2)$ pontot, f pedig az $(5; -1; 1)$ pontot. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, mely e -t és f -et is tartalmazza. (ZH, 2023. november 17.)

6. Keressük meg az $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = z-3$ egyenletrendszerű egyenesen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $P(1; 0; 0)$ és a $Q(1; -2; 4)$ pontoktól.

7. Az $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazokra teljesül, hogy $U \leq \mathbb{R}^n, V \leq \mathbb{R}^n$ és $U \cup V \leq \mathbb{R}^n$. Következik-e ebből, hogy $U \subseteq V$ vagy $V \subseteq U$?

8. Nevezzünk egy \mathbb{R}^n -beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a (fölülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik koordinátája a fölötte álló két koordináta összege. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak \mathbb{R}^n -ben (minden $n \geq 3$ esetén)?

9. Határozzuk meg az alábbi, \mathbb{R}^3 -beli vektorrendszerek generált alterét. Amennyiben ez az altér sík vagy egyenes, adjuk meg az egyenletét vagy egyenletrendszerét.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

10. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmege a $P(12; 1; 7)$ ponton és merőlegesen metszi az $x - 3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$ egyenletrendszerű egyenest. (ZH, 2010. december 6.)

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = 5 - y, z = 2$ egyenletrendszerű e egyenest és nincs közös pontja az $\frac{x}{7} = \frac{1-2y}{12} = 8 - z$ egyenletrendszerű f egyenessel. (ZH, 2022. október 18.)

12. Határozzuk meg az $A(1; 5; 2), B(2; 7; 4)$ és $C(2; 9; 10)$ pontok által meghatározott háromszög A csúcsán átmenő (belső) szögfelezőjének az egyenletrendszerét. (ZH, 2018. december 10.)

13. Tükrözzük a $P(-1; 2; 3)$ pontot az $\frac{x+1}{3} = y = z$ egyenletrendszerű egyenesre.

14. Határozzuk meg az $\frac{x-11}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+8}{-2}$ egyenletrendszerű egyenes távolságát az $\frac{x-10}{4} = \frac{y+8}{-9} = \frac{z-4}{-4}$ egyenletrendszerű egyenestől.

15. Írjuk fel a $12x + 5y + 5z = -33$ egyenletű sík egyenletét abban a koordinátarendszerben, amelynek origója az $O(5, 4, 3)$ pont és az x, y és z tengelyek pozitív féltengelyei rendre átmennek az $X(7, 0, 7), Y(7, 6, 4)$, illetve $Z(-1, 7, 9)$ pontokon.

16. Egy paralelepipedon egy csúcsából induló éleinek hossza a, b és c , a négy testátlója közül háromnak a hossza d, e és f . Határozzuk meg a hiányzó testátló hosszát.

17. Határozzuk meg az $A(79; 2; 37), B(-19; 72; 23)$ és $C(59; 42; 47)$ pontok által meghatározott háromszög körülírt körének a középpontját. (ZH, 2023. december 18.)

18. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{9} = z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4} = \frac{y+8}{6}, z = 7$ egyenletrendszerű f egyenesek *normáltranszverzálisának* az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e -t és f -et is merőlegesen metszi. (ZH, 2017. december 18.)

19*. Nevezzünk egy oszlopvektort *unalmasnak*, ha a koordinátái között legfeljebb két különböző érték fordul elő. Legkevesebb hány unalmas \mathbb{R}^n -beli vektort kell megadni ahhoz, hogy belőlük kifejezhető legyen (az \mathbb{R}^n -beli műveletekkel) az a vektor, amelynek az i -edik koordinátája $i - 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén?